ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sur les différentielles secondes et la dérivation des tenseurs.* Nota di PAUL DIENES, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. L'application du Calcul Tensoriel à la réalité physique implique une correspondence entre les tenseurs et les quantités géométrico physiques. D'habitude, un tenseur contravariant est assimilé à une direction c'est à dire, en dernière analyse, à un élément linéaire local. Par conséquent, le transport du tenseur dx^k dans une direction arbitraire δx^k nous conduit à considérer des différentielles mixtes δdx^k comme déterminées par dx^k, δx^k et par la nature du milieu où le transport est effectué.

C'est M. Levi-Civita [1] qui a commencé dans un récent mémoire l'étude systématique de telles relations ayant en vue la généralisation de la dérivation des tenseurs. Dans la présente Note nous voulons contribuer à cette étude en montrant que si, au lieu de la dérivation « partielle » c'est à dire par rapport à x^k, on considère la dérivation des tenseurs *le long d'une courbe*, on peut établir des relations assez générales entre les différentielles secondes, la dérivations et le transport des tenseurs.

2. Considérons les équations

$$\delta\, l x^k + f^k(dx^* \,|\, \delta x^*) = 0\,, \qquad (k = 1\,, 2\,, \ldots\,, n) \tag{2·1}$$

où les fonctions f^k sont homogènes d'ordre un en $dx^1, \ldots, dx^n$ de même qu'en $\delta x^1, \ldots, \delta x^n$ parceque δdx^k est, par définition, une quantité de second ordre et où l'astérisque indique que l'indice en question disparaît dans la sommation impliquée dans f^k.

Transformons les coordonnées d'après les équations

$$x^k = \tau^k(\xi^1, \ldots, \xi^n) \quad , \quad \xi^\alpha = \iota^\alpha(x^1, \ldots, x^n)$$

et posons

$$\frac{\partial x^k}{\partial \xi^\alpha} = \tau^k_\alpha \;, \quad \frac{\partial^2 x^k}{\partial \xi^\alpha\, \partial \xi^\beta} = \tau^k_{\alpha\beta} \;, \quad \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^k} = \iota^\alpha_k \;, \text{ etc.}$$

Il en résulte que

$$\delta dx^k = \tau^k_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, \delta\xi^\beta + \tau^k_\alpha\, \delta d\xi^\alpha$$

[1] T. Levi-Civita, *Diferenciales segundas que se comportan de modo invariantivo.* Revista Matemática Hispano-Americana, 1923, vol. V, pp. 165-176.

c'est à dire, si l'on désigne par $\varphi^\alpha(d\xi^*|\delta\xi^*)$ les fonctions qui correspondent à $f^k(dx^*|\delta x^*)$,

$$(2\cdot 2)\qquad f^k(\tau^*_\alpha\, d\xi^\alpha|\tau^*_\alpha\,\delta\xi^\alpha) = -\,\tau^k_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\,\delta\xi^\beta + \tau^k_\alpha\,\varphi^\alpha(d\xi^*|\delta\xi^*),$$

où

$$(2\cdot 3)\qquad \varphi^r(d\xi^*|\delta\xi^*) = t^r_k\,\tau^k_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\,\delta\xi^\beta + t^r_k\, f^k(\tau^*_\alpha\, d\xi^\alpha|\tau^*_\alpha\,\delta\xi^\alpha).$$

Les relations (2·2) et (2·3) sont la généralisation de la transformation des symboles à trois indices de Christoffel.

Plus généralement, posons

$$(2\cdot 4)\qquad \delta dx^k + f^k(dx^*, d^2x^*, \dots, d^m x^*|\delta x^*) = 0$$

où les fonctions f^k sont homogènes de degré μ_i en $d^i x^1, \dots, d^i x^n$ et $\mu_1 + 2\mu_2 + \dots + m\mu_m = 1$.

La relation (2·3) sera remplacée par

$$(2\cdot 5)\qquad \varphi^r(d\xi^*, d^2\xi^*, \dots, d^m\xi^*|\delta\xi^*) =$$
$$= t^r_k\,\tau^k_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\,\delta\xi^\beta + t^r_k\, f^k(\tau^*_\alpha\, d\xi^\alpha, \tau^*_{\alpha\beta}\, d\xi^\alpha\, d\xi^\beta + \tau^*_\alpha\, d^2\xi^\alpha, \dots|\tau^*_\alpha\,\delta\xi^\alpha).$$

3. La translation d'un tenseur le long d'une courbe. — Considérons la courbe $x^k(t)$ et posons $dx^k = \frac{dx^k}{dt}\,dt = \dot{x}^k\,dt$ et remplaçons δx^k par A^k. Les équations (2·1) s'écrivent

$$(3\cdot 1)\qquad \frac{dA^k}{dt} + f^k(\dot{x}^*|A^*) = 0.$$

Ces équations correspondent à celles de M. Levi-Civita pour le déplacement parallèle d'un tenseur contravariant le long d'une courbe donnée [1]. Le cas $\delta = d$ nous donne

$$(3\cdot 2)\qquad \frac{d^2x^k}{dt^2} + f^k(\dot{x}^*|\dot{x}^*) = 0.$$

Les courbes déterminées par ce système peuvent être appelées géodésiques ou courbes fondamentales. Comme $A^1, \dots, A^n$ déterminent une direction, le système (3·1) définit le transport d'une direction ou, si l'on veut, celui des courbes géodésiques le long de la courbe donnée.

[1] T. Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque* etc. [Rendiconti di Palermo, t. XLII (1917), pp. 173-205].

Si les fonctions f^k satisfont à la condition de Lipschitz, le système (3·1) admet une seule solution $A^1(t), \dots, A^n(t)$ telle que $A^k(t_0) = A_0^k$ où A_0^k sont données arbitrairement.

La même remarque, appliquée au système (2·4), nous conduit aux équations

$$\frac{dA^k}{dt} + f^k(\dot{x}^*, \ddot{x}^*, \dots, \overset{[m]}{x^*} | A^*) = 0 \tag{3·3}$$

qui déterminent un déplacement d'un genre très général le long de la courbe.

4. La dérivation tensorielle généralisée. — Nous définissons la dérivée tensorielle de A^k le long de la courbe $x^k(t)$ en posant

$$\frac{DA^k}{Dt} = \frac{dA^k}{dt} + f^k(\dot{x}^* | A^*). \tag{4·1}$$

Nous justifions cette définition par la remarque (aisée à vérifier) que le second membre est un tenseur contravariant, c'est à dire que

$$\frac{DA^k}{Dt} = \frac{D\overline{A}^\alpha}{Dt} \tau_\alpha^k. \tag{4·2}$$

La dérivation est donc « covariante ». Remarquons que, en général, on ne peut pas en déduire une dérivation partielle par rapport à x^k, parcequ'on ne peut pas grouper les termes de $f^k(\dot{x}^* | A^*)$ de façon que chaque groupe contienne une seule des quantités $\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n$. Ce groupement n'est possible que si f^k est linéaire en $\dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n$ ce qui entraîne qu'il est linéaire aussi en $A^1, \dots, A^n$, à supposer cependant qu'on se tient à la relation $d\delta x^k = \delta dx^k$. C'est le cas envisagé par M. Levi-Civita [1] dans son mémoire classique, légèrement généralisé par M. Weyl [2].

On peut poser plus généralement

$$\frac{DA^k}{Dt} = \frac{dA^k}{dt} + f^k(\dot{x}^*, \ddot{x}^*, \dots, \overset{[m]}{x^*} | A^*) \tag{4·3}$$

et on voit facilement que cette dérivée est un tenseur contravariant.

5. Formule de l'accroissement fini. — Pour faire voir que le rôle joué dans le Calcul Tensoriel, par la dérivée ainsi définie est très semblable à celui joué par la dérivée dans le Calcul Différentiel ordinaire, nous allons démontrer un théorème qui nous paraît fondamental aussi dans les applications géométriques des tenseurs.

Considérons une ligne de tenseurs $A^k(t)$, c'est à dire les tenseurs $A^k(t)$ attachés aux points successifs d'une courbe donnée $x^k(t)$. Fixons t et dépla-

[1] Loc. cit.

[2] H. Weil, *Raum, Zeit, Materie.* 3-te Aufl., p. 100.

çons $A^k(t)$, au moyen des équations (3·1) [ou (3·3)], le long de $x^k(t)$, de t à t_0. Le résultat, $A^k(t \between t_0)$, est un tenseur attaché à t_0. Comme ce tenseur varie avec t, nous aurons à t_0 une famille de tenseurs à un paramètre. Posons

$$F^k(t) = A^k(t \between t_0).$$

Nous avons

$$F^k(t) = F^k(t_0) + \left(\frac{dF^k}{dt}\right)_{t_0}(t_0 - t_0) + M(t - t_0)^2$$

où M est borné au voisinage de t_0.

Les équations (3·1) écrites sous forme d'équations intégrales, nous donnent

$$(5\cdot1)\quad F^k(t) = -\int_t^{t_0} f^k[x^{\cdot}\,|\,A^*(t \between \tau)]\,d\tau + A^k(t)\quad,\quad \dot{x}^k = \frac{dx^k}{d\tau}$$

de sorte que $F^k(t_0) = A^k(t_0)$. Puis

$$(5\cdot2)\quad \frac{dF^k}{dt} = f^k[\dot{x}^*\,|\,A^*(t)] - \int_t^{t_0}\frac{df^k}{dt}\,d\tau + \frac{dA^k}{dt} = \frac{DA^k}{Dt} - \int_t^{t_0}\frac{df^k}{dt}\,d\tau$$

ce qui donne

$$(5\cdot3)\qquad \left(\frac{dF^k}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{DA^k}{Dt}\right)_{t_0}$$

c'est à dire

$$(5\cdot4)\qquad A^k(t \between t_0) - A^k(t_0) = \left(\frac{DA^k}{Dt}\right)_{t_0}(t - t_0) + \mu(t - t_0)^2$$

où μ, comme M et $\left|\frac{df^k}{dt}\right|$, est borné au voisinage de t_0. Cette formule montre que la dérivation tensorielle le long d'une courbe correspond bien à l'opération analogue de l'Analyse ordinaire.

Remarquons qu'on déduit de même de (5·2) que

$$(5\cdot5)\qquad \lim_{t_0 \to t}\frac{dA^k(t \between t_0)}{dt} = \frac{DA^k(t)}{Dt}.$$

On peut interpréter les équations (5·3) de la manière suivante. La translation (3·1) établit une correspondence entre les tenseurs d'une ligne tensorielle et des tenseurs attachés au point t_0. Les tenseurs $A^k(t)$ de la ligne tensorielle sont pour ainsi dire représentés à t_0 par les tenseurs $A^k(t \between t_0)$ qui leur correspondent. La dérivation ordinaire, c'est à dire locale, en t_0, des fonctions $A^k(t \between t_0)$ par rapport au paramètre t est pour ainsi dire défigurée en dérivation tensorielle si l'on considère ces fonctions comme des composants tensoriels replacés à leurs places originelles.

6. Formule de Taylor. — Si les fonctions f^k sont linéaires [1] (et nécessairement homogènes) en $A^1, \ldots, A^n$, nous avons

$$(6\cdot 1)\qquad A^k(t \between t_0) = -\int_t^{t_0} f^k_{0i}(\dot{x}^*, \ddot{x}^*, \ldots)\, A^i(t \between \tau)\, d\tau + A^k(t)\ , \quad \dot{x} = \frac{dx^k}{d\tau} \text{ etc.}$$

Par conséquent

$$(6\cdot 2)\qquad \frac{dA^k(t \between t_0)}{dt} = \frac{DA^k(t)}{Dt} - \int_t^{t_0} f^k_{0i}\, \frac{dA^i(t \between \tau)}{dt}\, d\tau\ ,$$

et on peut établir (sous des conditions des dérivabilités etc., tout à fait analogues à celles du calcul ordinaire) soit *la formule de Taylor des tenseurs déplacés*

$$(6\cdot 3)\qquad A^k(t \between t_0) = A^k(t_0) + \\ + \left(\frac{DA^k}{Dt}\right)_{t_0} (t - t_0) + \cdots + \frac{1}{m!}\left(\frac{D^m A^k}{Dt^m}\right)_{t_0} (t - t_0)^m + R_{m+1}$$

avec

$$(6\cdot 4)\qquad R_{m+1} = \frac{(t - t_0)^{m+1}}{(m+1)!}\left[\frac{D^{m+1} A^k}{D t^{m+1}} - \int_t^{t_0} f^k_{0i}\, \frac{d^{m+1} A^i(t \between \tau)}{dt^{m+1}}\, d\tau\right]_{t + \theta(t - t_0)},$$

soit le développement en série

$$(6\cdot 5)\qquad A^k(t \between t_0) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{D^m A^k}{D t^m}\right)_{t_0} \frac{(t - t_0)^m}{m!}\ .$$

La possibilité d'un tel développement dépend à la fois de la ligne tensorielle envisagée $A^k(t)$ et de la nature analytiques des fonctions $f^k_{0i}(\dot{x}^*, \ddot{x}^*, \ldots)$.

Tous ces résultats s'étendent aux tenseurs d'ordre et de type quelconque. Le cas où le nombre des paramètres est n nous amène au problème de la dérivation partielle. On arrive ainsi à la définition

$$(6\cdot 8)\qquad \frac{DA^k}{Dx^i} = \frac{\partial A^k}{\partial x^i} + f^k_{0i}(A^*)\ , \quad f^k_{0i}(A^*) = f^k\left(\frac{\partial x^*}{\partial x^i} \,|\, A^*\right).$$

On voit facilement que $f^k(\dot{x}^* | A^*)$ *doit être linéaire en* $\dot{x}^i$ *pour que la dérivée soit un tenseur de type* A^k_{0i}. Mais, comme les résultats des §§ 3-6 sont valables pour des fonctions f^k *quelconques*, ces fonctions peuvent être linéaires en $\dot{x}^i$ sans l'être en A^i. La dérivation le long d'une ligne paraît cependant être une notion plus générale et plus fondamentale que la dérivation partielle.

[1] Ce cas est traité en détail dans notre mémoire *Sur la structure mathématique du Calcul Tensoriel*, Journal de Mathématique 1924. Premier fascicule.