ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Matematica. — *Sul teorema di Weierstrass.* Nota di GIORGIO VRANCEANU, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Si sa come Weierstrass nel suo *Vorbereitungsatz* (Opere, tomo II), dimostrò quanto segue:

Sia data una funzione $F(y, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di $n+1$ variabili, rappresentata da una serie multipla di potenze positive, convergente in un certo campo

$$D[|x_i| \leq r, |y| \leq \varrho]$$

la quale si annulla, per $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = y = 0$.

Indichiamo per semplicità il complesso delle variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$, colla sola lettera x, ed ordiniamo secondo le potenze dell'argomento y, scrivendo

$$F(y|x) = B_0(x) + B_1(x)\, y + \cdots + B_n(x)\, y^n + \cdots ,$$

dove almeno $B_0(0) = 0$. Se per $x = 0$ abbiamo

$$B_0(0) = 0 , B_1(0) = 0 , \ldots , B_{m-1}(0) = 0 , B_m(0) \neq 0 ,$$

il teorema di Weierstrass dice, che in un campo sufficientemente piccolo D', contenuto in D, la funzione $F(y|x)$ si può mettere sotto la forma

$$F(y|x) = Q(y|x)\, f(y|x) \tag{1}$$

dove Q è una funzione olomorfa in D', che non si annulla in tale campo, e $f(y|x)$ è un polinomio in y,

$$f(y|x) = y^m - p_1 y^{m-1} - p_2 y^{m-2} - \cdots - p_m,$$

i cui coefficienti $p_1, p_2, \ldots, p_m$, sono funzioni di x, olomorfe in D', e nulle per $x = 0$.

In D', dove $Q(y|x)$ non si annulla, l'equazione $F(y|x) = 0$ è equivalente all'equazione $f(y|x) = 0$: come dice Poincaré nella sua tesi, la funzione y, definita da $F(y|x) = 0$, nell'intorno di $y = x = 0$, è una funzione algebroide di grado m. Vogliamo dare una nuova dimostrazione del teorema di Weierstrass, la quale fornisce in pari tempo un metodo, per calcolare le funzioni $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

2. Per rendere più agile il nostro procedimento, ci converrà premettere qualche lemma algebrico. Prendiamo un polinomio in y di grado m:

$$f(y) = y^m - p_1 y^{m-1} - p_2 y^{m-2} - \cdots - p_m ,$$

risguardandovi per un momento $p_1, \dots, p_m$ come variabili indipendenti.

Lemma I. Se prendiamo due potenze qualsiansi consecutive y^n, y^{n+1}, $(n \geq m)$ e facciamo le loro divisioni per $f(y)$, si ha

$$\begin{aligned} y^n &= q_{n-m} \; f(y) + r_n(y) \\ y^{n+1} &= q_{n+1-m} \, f(y) + r_{n+1}(y) , \end{aligned}$$

dove q_{n-m} e q_{n+1-m} sono polinomi in y di grado $n-m$ ed $n+1-m$, ed $r_n(y)$, $r_{n+1}(y)$ sono polinomi di grado $m-1$ in y. Esplicitandoli sotto la forma

$$\begin{aligned} r_n(y) &= a_1^{(n)} \; y^{m-1} + a_2^{(n)} \; y^{m-2} + \cdots + a_m^{(n)} , \\ r_{n+1}(y) &= a_1^{(n+1)} y^{m-1} + a_2^{(n+1)} y^{m-2} + \cdots + a_m^{(n+1)} , \end{aligned}$$

si riconosce immediatamente che sussistono le relazioni

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} a_1^{(n+1)} &= a_1^{(n)} p_1 + a_2^{(n)} , \\ &\cdots\cdots \\ a_h^{(n+1)} &= a_1^{(n)} p_h + a_{h+1}^{(n)} , \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_m^{(n+1)} &= a_1^{(n)} p_m ; \end{aligned} \right.$$

$$(3) \qquad q_{n+1-m} = y \, q_{n-m} + a_1^{(n)} .$$

Le relazioni (2) permettono di calcolare i coefficienti di $r_{n+1}(y)$, quando sono conosciuti quelli di $r_n(y)$. Si vede facilmente che i coefficienti di $r_n(y)$ sono polinomi nelle $p_1, \dots, p_m$. Le relazioni ricorrenti (3) forniscono per q_{n-m} l'espressione esplicita

$$(3') \qquad q_{n-m} = y^{n-m} + p_1 y^{n-m-1} + a_1^{(m+1)} \, y^{n-m-2} + \cdots + a_1^{(n-1)} .$$

Lemma II. Se $|y| \leq \varrho$ e le p soddisfano le disuguaglianze

$$|p_1| \leq \frac{\varrho}{m} , \; |p_2| \leq \frac{\varrho^2}{m^2} , \; \dots , \; |p_m| \leq \frac{\varrho^m}{m^m} ,$$

risulta che

$$|r_n(y)| \leq \varrho^n , \quad |q_{n-m}| \leq \frac{n \varrho^{n-m}}{m} .$$

Per dimostrarlo, osserviamo che, sotto le condizioni $|p_i| \leq \frac{\varrho^i}{m_i}$, si ottiene, senza difficoltà, dalle formule (2)

$$|a_h^{(n)}| \leq \frac{\varrho^{n-m+h}}{m^h} \qquad (h = 1, 2, \dots, m).$$

Ma

$$r_n(y) = a_1^{(n)} y^{m-1} + a_2^{(n)} y^{m-2} + \cdots + a_m^{(n)}$$

$$q_{n-m} = y^{n-m} + p_1 y^{n-m-1} + a_1^{(m+1)} y^{n-m-2} + \cdots + a_1^{(n-1)}$$

sicchè

$$|r_n(y)| \leq \varrho^n \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \cdots + \frac{1}{m^m}\right) \leq \varrho^n$$

$$|q_{n-m}| \leq \varrho^{n-m} + \frac{\varrho^{n-m-1}\varrho}{m} + \cdots \frac{\varrho^{n-m}}{m}$$

$$\leq \varrho^{n-m} + \frac{n-m}{m} \varrho^{n-m} = \frac{n}{m} \varrho^{n-m}.$$

3 Ciò posto, riattacchiamoci alle considerazioni e notazioni del n. 1.

Poichè $B_m(0) \neq 0$, possiamo moltiplicare $F(y|x)$ per $\frac{1}{B_m(0)}$. Ponendo altresì

$$\frac{B_m(x)}{B_m(0)} = 1 - A_m(x) \ , \quad \frac{B_i(x)}{B_m(0)} = -A_i(x) \qquad (i \neq m),$$

$F(y|x)$ prende la forma

$$F(y|x) = y^m - A_0(x) - A_1(x)\, y - \cdots - A_m(x)\, y^m + \cdots$$

dove

$$A_0(0) = 0 \ , \ A_1(0) = 0 \ , \dots , \ A_m(0) = 0 .$$

Facciamo la divisione di $F(y|x)$, considerata come serie di potenze di y, per $f(y)$, operazione che dà luogo, almeno formalmente, ad una identità del tipo

$$F(y|x) = Q(y|x)\, f(y) + R(y|x), \tag{4}$$

dove $Q(y|x)$ è una funzione della y e delle x, ed $R(y|x)$ un polinomio di grado $m-1$ in y, a coefficienti dipendenti dalle x. È essenziale di giustificare la (4), precisando il comportamento delle funzioni Q ed R, le quali hanno evidentemente le seguenti espressioni:

$$Q(y|x) = 1 - \sum_m^\infty {}_n A_n q_{n-m} ,$$

$$R(y|x) = r_m(y) - \sum_0^\infty {}_n A_n r_n(y) .$$

Si vede (lemma II) che, se $|p_i| \leq \frac{\varrho^i}{m^i}$, la serie che esprime $R(y|x)$ è uniformemente convergente, nel campo $D(|x| \leq r , |y| \leq \varrho < 1)$, dove è convergente $F(y|x)$. Essa rappresenta perciò una funzione regolare, non soltanto della y e delle x, ma anche delle p nel campo

$$\boldsymbol{\Gamma}\left(|x| \leq r \, , \, |y| \leq \varrho < 1 \, , \, |p_i| \leq \frac{\varrho^i}{m^i} \right).$$

Si riconosce poi (lemma II) che anche $Q(y|x)$ è una serie uniformemente convergente nel campo $\boldsymbol{\Gamma}$. Per $y = x = p = 0$, $Q(y|x) = 1$.

Risulta che esiste un certo campo N compreso in $\boldsymbol{\Gamma}$, nel quale $Q(y|x)$ non si annulla.

$R(y|x)$ si può scrivere manifestamente sotto la forma

$$R(y|x) = R_0(p|x) + R_1(p|x)\, y + \cdots + R_{m-1}(p|x)\, y^{m-1} .$$

4. Consideriamo adesso le m equazioni

$$(5) \qquad \begin{cases} R_0(p|x) = p_m \quad - A_0 - \sum_m^\infty {}_n A_n a_m^{(n)} = 0 , \\ R_1(p|x) = p_{m-1} - A_1 - \sum_m^\infty {}_n A \; a_{m-1}^{(n)} = 0 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ R_{m-1}(p|x) = p_1 - A_{m-1} - \sum_m^\infty {}_n A_n a_1^{(n)} = 0 . \end{cases}$$

I primi membri di queste m equazioni hanno le seguenti proprietà:

a) Sono funzioni olomorfe nelle x e nelle p, in $\boldsymbol{\Gamma}$.

b) Si annullano per $x = p = 0$.

c) Il loro determinante funzionale rispetto alle p, per $x = p = 0$, è uguale a 1.

Risulta senz'altro che queste m equazioni (nelle altrettante p e nelle x), sono atte a definire le p, come funzioni regolari delle x, nell'intorno di

$x = 0$, in un certo campo M compreso in Γ. Se prendiamo per le p le soluzioni di (5), la formula (4) diviene

$$F(y|x) = Q(y|x)\, f(y) . \tag{4'}$$

Nella parte comune ai campi N [dove $Q(y|x)$ non s'annulla] ed M (dove sono definite le p come funzioni regolari delle x), l'equazione $F(y|x) = 0$ è equivalente a $f(y) = 0$.

Rimane così stabilito, riducendosi in sostanza al caso normale [le m equazioni (5), con altrettante incognite, a determinante funzionale non nullo] il teorema di Weierstrass.

5. Veniamo infine al complemento essenziale, già annunciato al n. 1, cioè al calcolo effettivo dei coefficienti p, quali funzioni delle x. Se vogliamo applicare il metodo di approssimazioni successive, nella forma specificata dal prof. Levi Civita [1], è necessaria una preventiva trasformazione lineare delle equazioni (5). Mettendo in evidenza nei loro secondi membri i termini lineari nelle p, queste si possono scrivere:

$$p_{m-h} = A_{m+1}\, p_{m-h+1} + A_{m+2}\, p_{m-h+2} + \cdots + A_{m+h}\, p_m + \varphi_{m-h} \tag{5'}$$

dove

$$\varphi_{m-h} = A_h + A_m\, p_{m-h} + \sum_{i=1}^{h} A_{m+i}\,(a_{m-h}^{(m+i)} - p_{m-h+i}) + \sum_{i=h+1}^{\infty} A_{m+i}\, a_{m-h}^{(m+i)}$$

ha la proprietà di essere almeno di secondo ordine nelle p, per $x = 0$.

Ove si ponga

$$B_0 = 1 \ , \ B_h = A_{m+1}\, B_{h-1} + A_{m+2}\, B_{h-2} + \cdots + A_{m+h-1} + A_{m+h}\, B_0$$

le (5') equivalgono ulteriormente alle

$$p_{m-h} = B_h\, \varphi_m + B_{h-1}\, \varphi_{m-1} + \cdots + B_1\, \varphi_{m-h+1} + B_0\, \varphi_{m-h} \tag{5''}$$

in cui tutti i secondi membri sono di secondo ordine almeno nelle p, per $x = 0$.

Poste le equazioni sotto questa forma, la effettiva determinazione delle funzioni p delle x si può fare materialmente, sia col Levi-Civita, per approssimazioni successive, lasciando le x indeterminate, cominciando a porre nei secondi membri le p uguali a zero, traendo così una prima approssimazione, poi (introducendo la prima nei secondi membri), una seconda, ecc.; sia anche col metodo dei coefficienti indeterminati, assumendo le p sotto forma di serie (multiple) nelle x.

[1] *Sul teorema di esistenza delle funzioni implicite*, Atti del R. Istituto Veneto, 1909-1910.