ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

r omeccanica. — *Moti di fluidi incompressibili il cui vortice è normale alla velocità.* Nota di Bruno Finzi, presentata dal Corrispondente U. Cisotti.

In una recente Memoria [1] il dott. B. Segre si è posta la questione cinematica di caratterizzare i moti che, avendo luogo per superfici parallele, soddisfino alle relazioni

$$(1) \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 ,$$

$$(2) \qquad \operatorname{rot} \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0 ,$$

dove $\mathbf{v}$ definisce manifestamente la velocità. Tali superfici non possono essere che piani o sfere concentriche: è quest'ultimo caso che particolarmente forma oggetto della Memoria citata.

Mi propongo di mostrare nella Nota presente, sotto quali condizioni restrittive le conclusioni del Segre siano compatibili con le equazioni indefinite dell' idrodinamica. Risulta in particolare, che se la massa fluida è soggetta a forze conservative, le superfici di flusso non possono essere che piani. Dimostro la tesi dapprima assai semplicemente per fluidi perfetti (§ 3), e poi, con calcolo un po' più laborioso, per fluidi viscosi (§ 4).

1. Sia $\mathbf{k}_3$ un vettore unitario normale alla sfera di centro O e raggio x_3, e diretto verso l'esterno: la soluzione cinematica, di cui si è detto, così si esprime:

$$(3) \qquad \mathbf{v} = \mathbf{k}_3 \wedge \operatorname{grad} \psi \quad ; \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \varrho \mathbf{k}_3 ;$$

$$(4) \qquad \psi = \psi(x_1, x_2, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\sigma'} \log \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \, \varrho(x'_1, x'_2, x'_3, t) \, d\sigma' . \text{ [2]}$$

t rappresenta il tempo, x_1 e x_2 due coordinate ortogonali di un punto P della sfera di raggio x_3 (uguali alle coordinate cartesiane della proiezione

[1] *Sul moto sferico vorticoso di un fluido incompressibile*, Annali di matematica, serie IV, tomo I, fasc. 1°, pp. 31–55. Cfr. anche su tali moti: Beltrami, *Considerazioni idrodinamiche*, Rend. Ist. Lombardo, serie II, vol. XXII, fasc. 2°; Burali-Forti e Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, I, Pavia 1912, p. 122.

[2] B. Segre, loc. cit., formula (41), dove le coordinate x_1, x_2, x_3 sono indicate con p, q, r, e non è messa in evidenza la dipendenza di $\mathbf{v}, \psi, \varrho$ da t.

stereografica dal punto di coordinate cartesiane $(0,0,1)$ sul piano diametrale xy di Q, proiezione da O di P sulla sfera di raggio unitario), θ l'arco di cerchio massimo congiungente due punti $P(x_1, x_2, x_3)$, $P'(x'_1, x'_2, x'_3)$, σ' tutta l'area vorticosa della sfera,

$$\varrho = |\mathrm{rot}\,\mathbf{v}| = \frac{1}{x_3^2}\bar{\varrho}(x_1, x_2, t), \tag{5}$$

così che $\varrho\, d\sigma'$ non dipende da x_3, come vuol la (4) (¹).

2. La (3) dovrà soddisfare alla equazione vettoriale dei fluidi incompressibili, cioè alla

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,\mathbf{v}^2 + \nu\,\mathrm{rot}^2\,\mathbf{v} = \mathbf{F} - \mathrm{grad}\,p \quad (^2). \tag{6}$$

Nella (6) la densità è assunta uguale a uno, e p rappresenta la pressione specifica, $\mathbf{F}$ la forza unitaria di massa, ν il coefficiente di viscosità. Prendendo il rot. di entrambi i membri, sarà sempre e ovunque:

$$\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} + \mathrm{rot}\,\{(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}\} + \nu\,\mathrm{rot}^3\,\mathbf{v} = \mathrm{rot}\,\mathbf{F}.$$

Questa, per la (3) e la (4), diviene:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}\,\mathbf{k}_3 + \mathrm{grad}\,\psi \wedge \mathrm{grad}\,\varrho + \nu\,\mathrm{rot}^2\,\varrho\,\mathbf{k}_3 = \mathrm{rot}\,\mathbf{F} \quad (^3). \tag{7}$$

La (7) stabilisce il vincolo a cui deve soggiacere $\mathbf{F}$ perchè sia possibile il moto di un fluido soddisfacente alle (1) e (2).

3. Sia, in particolare, il fluido soggetto a forze conservative, per le quali $\mathrm{rot}\,\mathbf{F} = 0$. La (7) diverrà:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}\,\mathbf{k}_3 + \mathrm{grad}\,\psi \wedge \mathrm{grad}\,\varrho + \nu\,\mathrm{rot}^2\,\varrho\,\mathbf{k}_3 = 0\,. \tag{8}$$

(¹) Si noti come la soluzione cinematica del Segre rientri in una categoria di moti messi recentemente in rilievo dal prof. U. Cisotti (*Sull'energia cinetica di masse fluide continue: espressioni varie dell'energia cinetica*, Rend. Acc. dei Lincei, vol. XXXIII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 2°, pp. 59, 60), per i quali esiste un punto fisso O (il centro delle sfere concentriche lungo le quali avviene il moto) tale che $(P - O) \times (\mathbf{v} \wedge \mathrm{rot}\,\mathbf{v}) = 0$.

(²) Cfr. Burali-Forti e Marcolongo, loc. cit., II, pp 56 e 62, ove si tenga presente che $\Delta'\mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} - \mathrm{rot}^2\,\mathbf{v}$ (loc. cit., I, pag. 98).

(³) Si osservi che, essendo $\mathbf{k}_3 \times \mathrm{grad}\,\psi = 0$,

$$\mathrm{rot}\,\{\varrho\,\mathbf{k}_3 \wedge (\mathbf{k}_3 \wedge \mathrm{grad}\,\psi)\} = -\,\mathrm{rot}\,\varrho\,\mathrm{grad}\,\psi = -\,\{\mathrm{grad}\,\varrho \wedge \mathrm{grad}\,\psi + \varrho\,\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\psi\}\,.$$

Proiettiamo la (8) lungo le linee coordinate x_1, x_2, x_3 della metrica definita da

$$(9)\qquad ds^2 = \sum_1^3{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s = \left(\frac{2x_3}{f}\right)^2 dx_1^2 + \left(\frac{2x_3}{f}\right)^2 dx_2^2 + dx_3^2 \text{ (}^1\text{)},$$

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 1\,;$$

e si consideri il caso particolare di fluidi perfetti, per i quali $\nu = 0$.

Se $\mathbf{k}_i$ è un vettore unitario tangente alla linea x_i:

$$\operatorname{grad}\varrho = \sum_1^3{}_i \sqrt{a_{ii}}\,\frac{\partial\varrho}{\partial x_i}\,\mathbf{k}_i \quad,\quad \operatorname{grad}\psi = \sum_1^3{}_i \sqrt{a_{ii}}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\,\mathbf{k}_i \quad (i = 1, 2, 3) \text{ (}^2\text{)}.$$

Moltiplichiamo la (8) scalarmente per $\mathbf{k}_i$: risulterà

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{f}{2x_3}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_2}\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_3} = \dfrac{f}{2x_3}\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_3} = 0 \\[2ex] \left(\dfrac{f}{2x_3}\right)^2 \dfrac{d(\psi,\varrho)}{d(x_1,x_2)} + \dfrac{\partial\varrho}{\partial t} = 0\,. \end{array}\right.$$

Le prime due per x_3 finito sono assurde, esigendo esse che sia o $\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_3} = 0$, oppure $\psi = \text{cost}$. La prima soluzione, per $\bar\varrho \neq 0$, è in contraddizione con la (5), per $\bar\varrho = 0$ (moto irrotazionale) le (2), (3), (4) perderebbero ogni significato. La seconda annullerebbe, in virtù della (3) in ogni luogo e in ogni istante la velocità. La (8) non è dunque soddisfatta che per $x_3 = \infty$, nella ipotesi cioè di moto piano.

4. Si consideri il caso di fluidi viscosi: per essi $\nu \neq 0$:

Sia R_i $(i = 1, 2, 3)$ il sistema covariante associato a $\varrho\mathbf{k}_3$, così che $\sqrt{a_{ii}}\, R_i$ sia la componente di $\varrho\mathbf{k}_3$ secondo x_i. Sarà $R_1 = R_2 = 0$, $R_3 = \varrho$. Le componenti di $\operatorname{rot}^2 \varrho\mathbf{k}_3$ saranno allora

$$M_i = \sum_1^3{}_{pq}\, a^{(pq)}\, R_{ipq} - \frac{\partial \operatorname{div}\varrho\mathbf{k}_3}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3) \text{ (}^3\text{)}.$$

Ricordando che $\varrho\mathbf{k}_3 = \operatorname{rot}\mathbf{v}$,

$$M_i = \sum_1^3{}_{pq}\, a^{(pq)}\, R_{ipq}\,.$$

(1) B. Segre, loc. cit., formula (23).

(2) Cfr. Ricci e Levi-Civita, *Méthodes de calcul différentiel absolu*, Blanchard, Paris 1923, pp. 135-137, ove si ricordi che il sistema covariante associato a $\operatorname{grad}\varrho$ è $\dfrac{\partial\varrho}{\partial x_i}$, a $\operatorname{grad}\psi$, $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_i}$.

(3) Ricci e Levi-Civita, loc. cit., pag. 196, formula (5′).

Ma in virtù della (9) è:

$$\left\{\begin{aligned}
&R_{111}=\frac{8x_3}{f^2}\frac{\partial\varrho}{\partial x_1}\quad;\quad R_{222}=\frac{8x_3}{f^2}\frac{\partial\varrho}{\partial x_2}\quad;\quad R_{333}=\frac{\partial^2\varrho}{\partial x_3^2}\,;\\
&R_{122}=R_{211}=R_{133}=R_{233}=0\,;\\
&R_{311}=\frac{\partial^2\varrho}{\partial x_1^2}-\left(\frac{f}{2x_3}\right)^2\left[\left(\frac{4x_3}{f^2}\right)^2\varrho+\frac{\partial\left(\frac{2x_3^2}{f^2}\frac{\partial\varrho}{\partial x_1}\right)}{\partial x_1}-\frac{\partial\left(\frac{2x_3^2}{f^2}\frac{\partial\varrho}{\partial x_2}\right)}{\partial x_2}\right]-\frac{4x_3}{f^2}\frac{\partial\varrho}{\partial x_3}\,;\\
&R_{322}=\frac{\partial^2\varrho}{\partial x_2^2}-\left(\frac{f}{2x_3}\right)^2\left[\left(\frac{4x_3}{f^2}\right)^2\varrho+\frac{\partial\left(\frac{2x_3^2}{f^2}\frac{\partial\varrho}{\partial x_2}\right)}{\partial x_2}-\frac{\partial\left(\frac{2x_3^2}{f^2}\frac{\partial\varrho}{\partial x_1}\right)}{\partial x_1}\right]-\frac{4x_3}{f^2}\frac{\partial\varrho}{\partial x_3}\,;
\end{aligned}\right.$$

così che

$$\left\{\begin{aligned}
&M_1=\frac{2}{x_3}\frac{\partial\varrho}{\partial x_1}\quad;\quad M_2=\frac{2}{x_3}\frac{\partial\varrho}{\partial x_2}\\
&M_3=\left(\frac{f}{2x_3}\right)^2\left[\frac{\partial^2\varrho}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varrho}{\partial x_2^2}+\frac{8x_3}{f^2}\frac{\partial\varrho}{\partial x_3}-\frac{8}{f^2}\varrho\right]+\frac{\partial^2\varrho}{\partial x_3^2}\,.
\end{aligned}\right.$$

La (8), ove si tenga conto della (5), si muterà nelle

$$(8')\qquad\left\{\begin{aligned}
&\frac{f}{x_3^4}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\bar\varrho=\frac{2\nu}{x_3^3}\frac{\partial\bar\varrho}{\partial x_1}\quad;\quad\frac{f}{x_3^4}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\bar\varrho=-\frac{2\nu}{x_3^3}\frac{\partial\bar\varrho}{\partial x_2}\,;\\
&\frac{f^2}{4x_3^4}\frac{d(\psi,\bar\varrho)}{d(x_1,x_2)}=-\nu\frac{f^2}{4x_3^4}\left(\frac{\partial^2\bar\varrho}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\bar\varrho}{\partial x_2^2}+\frac{8}{f^2}\bar\varrho\right)-\frac{1}{x_3^2}\frac{\partial\bar\varrho}{\partial t}\,.
\end{aligned}\right.$$

Queste, per x_3 finito e non nullo, diverranno:

$$(8'')\qquad\left\{\begin{aligned}
&\frac{f}{x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\bar\varrho=2\nu\frac{\partial\bar\varrho}{\partial x_1}\quad;\quad\frac{f}{x_3}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\bar\varrho=-2\nu\frac{\partial\bar\varrho}{\partial x_2}\\
&\frac{d(\psi,\bar\varrho)}{d(x_1,x_2)}=-\nu\left(\frac{\partial^2\bar\varrho}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\bar\varrho}{\partial x_2^2}+\frac{8}{f^2}\bar\varrho\right)-\frac{4x_3^2}{f^2}\frac{\partial\bar\varrho}{\partial t}\,.
\end{aligned}\right.$$

Le prime due delle (8″), poi che f, ψ, $\bar\varrho$ sono funzioni di x_1 e x_2 soltanto, sono assurde, a meno che sia $\bar\varrho=0$ (moto irrotazionale), con che le (2), (3), (4) perderebbero ogni significato; oppure contemporaneamente $\bar\varrho=\text{cost.}$ e $\psi=\text{cost.}$: anche quest'ultima soluzione è assurda, esigendo essa, per la (3), l'annullarsi di $\mathbf{v}$. Le (8′), e quindi la (8), non son dunque soddisfatte che per $x_3=\infty$, nella sola ipotesi cioè di moto piano.