ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle curve sghembe algebriche con soli rami autoduali.* Nota del dott. GIUSEPPE GHERARDELLI, presentata dal Corrispondente GINO FANO [1].

1. Le curve sghembe algebriche, le cui tangenti appartengono ad un complesso lineare, godono della proprietà che ogni loro ramo completo è del tipo autoduale $(\nu\, \nu'\, \nu'')$ [2]. Si tratta di una proprietà caratteristica per tali curve?

J. H. Grace [3], che pose per primo la domanda, ritenne di dover dare risposta affermativa per il caso delle curve razionali. Successivamente però M. F. Egan [4] ha recato l'esempio di una sestica razionale con due flessi ordinarî e due cuspidi del tipo autoduale (212), le tangenti della quale non appartengono ad un complesso lineare.

Sebbene la questione possa, in virtù di questo esempio, considerarsi risoluta negativamente, si può nondimeno cercar di stabilire un risultato più preciso. In questa Nota [5] viene esaminato, dal punto di vista della geometria della retta, il problema della determinazione di tutti i possibili tipi di curve sghembe con soli rami autoduali; e, per le curve razionali, esso viene risolto.

Indicheremo costantemente nel seguito: con Q una quadrica (non cono) di S_5, i cui punti si intendono rappresentare le rette dello spazio ordinario; con C una (qualunque) curva algebrica irriducibile contenuta nella quadrica Q insieme alle sue tangenti, e quindi immagine di una sviluppabile algebrica di S_3; infine con C_γ una curva C immagine di una sviluppabile il cui spi-

(1) Presentata nella seduta del 18 aprile 1924.

(2) In generale una curva sghemba algebrica d'ordine n e genere p, contenuta in un complesso lineare, è dotata di $2(n+3p-3)$ flessi ordinarî, cioè rami (121). Sotto questa forma la proprietà fu rilevata per la prima volta dal Picard [*Application de la théorie des complexes linéaires ....*, Ann. de l'École Normale Sup. (2), 6 (1877), pag. 329]. Per il significato preciso del simbolo $(\nu\, \nu'\, \nu'')$ vedasi ad es.: Bertini, *Introduzione alla Geometria proiettiva degli iperspazi* (2ª ediz., Messina, 1923), pag. 439.

(3) *A theorem on curves in a linear complex*, Proc. Camb. Phil. Soc., vol. XI, 1902, pag. 27.

(4) *The linear complex and a certain class of twisted curves*, Proc. Royal Irish Ac., vol. XXIX, 1911, pag. 33.

(5) Al chiar. prof. Gino Fano che mi ha suggerito questo studio porgo qui i miei più vivi ringraziamenti.

golo di regresso abbia solo rami di tipo autoduale. Per le curve C_γ razionali ha luogo il seguente teorema:

« Una C_γ razionale o è un'asintotica di una quadrica di S_4 (1), e, come « tale, immagine di una sviluppabile contenuta in un complesso lineare; « oppure appartiene ad S_5, ed è sezione iperpiana della rigata delle tangenti « di un'asintotica (razionale) di una quadrica di S_6. Viceversa, ogni tale « sezione (generica) è immagine di una sviluppabile *non* contenuta in un « complesso lineare, lo spigolo di regresso della quale ha tuttavia solo rami « di tipo autoduale ».

Abbiasi ad es. una sestica sghemba razionale con sei flessi; l'immagine della relativa sviluppabile, sulla quadrica delle rette, è una C_γ^{10} razionale con sei cuspidi, la quale, ove non stia in S_4, sarà sezione iperpiana della rigata delle tangenti di una sestica razionale normale di S_6.

2. Sia Γ una curva sghemba algebrica; O un suo punto origine di un ramo δ $(\nu\,\nu'\,\nu'')$; t la tangente in O al ramo δ. Sulla curva C, immagine della rigata delle tangenti di Γ, si consideri il punto T immagine della retta t, e quel ramo δ', avente T come origine, i cui punti sono le immagini delle tangenti del ramo δ.

Se O è un punto generico di Γ e perciò origine di un ramo δ (111), o, più generalmente, se O è origine di un ramo δ per cui $\nu = \nu''$, il piano osculatore in T al corrispondente ramo δ' tocca la quadrica Q lungo la tangente in T a δ', ma non è contenuto in Q; se invece $\nu \neq \nu''$, e allora soltanto, il piano osculatore in T a δ' è un piano di Q. Ciò si dimostra nel modo seguente.

Se r è il rango di Γ, cioè l'ordine di C, fra le r tangenti di Γ che si appoggiano ad una retta generica x, la t (tangente nell'origine del ramo δ) ne assorbe:

a) ν' se x incontra t genericamente;
b) $\nu + \nu'$ se x appartiene ad O;
c) $\nu' + \nu''$ se x appartiene al piano α osculatore in O al ramo δ;
d) $\nu + \nu' + \nu''$ se x appartiene al fascio $(O\,,\alpha)$;
e) $\nu + 2\nu' + \nu''$ se x coincide con t (2).

(1) Designo qui con tal nome quelle curve appartenenti ad uno spazio $[2r]$, per le quali la corrispondenza fra i punti e i relativi iperpiani osculatori è subordinata dalla polarità rispetto ad una quadrica. Esse giacciono su questa stessa quadrica insieme ai loro $[r-1]$ osculatori; ed è questa una loro proprietà caratteristica. La determinazione di queste curve si riconduce analiticamente all'integrazione delle equazioni differenziali lineari equivalenti alle loro « aggiunte » di Lagrange; integrazione che può effettuarsi in termini finiti come ha mostrato Darboux: *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, II, 1889, p. 99. Vedansi anche: Borel, *Sur l'équation adjointe....*, Annales de l'École Normale Sup. (3), 9 (1892), pag. 63; Fano, *Sulle equazioni differenziali lineari....*, Atti della R. Acc. di Torino, vol. XXXIV, 1899, pag. 388.

(2) Cfr. ad es. Bertini, loc. cit., pag. 453.

Sieno poi: Q_0 il cono quadrico di prima specie col vertice in T, immagine del complesso lineare speciale di asse t; ω', α' i due piani di Q (di sistema diverso), immagini rispettivamente della stella di rette O e del piano rigato α; s la retta $(\omega' \alpha')$ immagine del fascio (O, α). Allora, fra le r intersezioni di un iperpiano tangente a Q in un punto variabile X con C, ne cadono in T, origine di δ':

a) ν' se X è un punto generico di Q_0;

b) $\nu + \nu'$ se X è un punto generico di ω';

c) $\nu' + \nu''$ se X è un punto generico di α';

d) $\nu + \nu' + \nu''$ se X è un punto generico di $s \equiv (\omega' \alpha')$;

e) $\nu + 2\nu' + \nu''$ se X coincide con T.

Gli iperpiani tangenti a Q nei punti di Q_0, non passando tutti per una retta, δ' è, in ogni caso, di ordine ν', e ha per tangente nell'origine T la retta s. Se $\nu = \nu''$, ciascuno dei due piani ω', α' è semplicemente tangente nell'origine T al ramo δ', il cui primo rango vale pertanto $\nu = \nu''$. Gli ∞^1 iperpiani tangenti a Q nei punti di s hanno in T incontro $(2\nu + \nu')$-punto con δ'; cosicchè il piano osculatore nell'origine T a δ' è certo contenuto nello S_3 polare della retta s, ma non giace sulla quadrica Q (1). Se invece $\nu \neq \nu''$, secondochè $\nu \gtrless \nu''$ sarà ω' il piano osculatore e α' un piano tangente, o viceversa (2).

Se dunque ogni ramo di Γ è di tipo autoduale, e perciò C è una C_γ, *nessun* piano osculatore di C_γ apparterrà alla quadrica Q, per modo che la rigata delle tangenti di C_γ, contata due volte, costituirà la completa intersezione della quadrica stessa Q e della varietà dei piani osculatori di C_γ. Per conseguenza, la rigata delle tangenti e la varietà dei piani osculatori di C_γ avranno lo stesso ordine.

Viceversa, ogni curva C, per la quale risulti soddisfatta la condizione precedente è una curva C_γ. Fra le curve C le C_γ sono pertanto caratterizzate da ciò, che *nessun* loro piano osculatore è contenuto nella quadrica Q.

(1) Proseguendo nell'analisi, lo S_3 polare di s potrà coincidere o no con lo S_3 osculatore in T a δ'. Nella prima ipotesi, che esige $\nu > 1$, l'iperpiano tangente in T alla quadrica Q, avendo in T incontro $(2\nu + 2\nu')$-punto con il ramo δ', è l'iperpiano ivi osculatore a δ' stesso; cosicchè il ramo δ' sarà del tipo $(\nu' \; \nu \; \nu - i \; i \; \nu')$ $[i = 1, 2, \ldots, \nu - 1]$. Nella seconda ipotesi il secondo rango di δ' vale ν, mentre l'iperpiano tangente in T alla quadrica Q, certo contenente lo S_3 osculatore, potrà coincidere o no con lo S_4 osculatore in T a δ'. Se coincide deve essere $\nu' > 1$ e il ramo δ' è del tipo $(\nu' \; \nu \; \nu \; \nu' - k \; k)$ $[k = 1, 2, \ldots, \nu' - 1]$; se non coincide, il terzo rango vale ν', e δ' è del tipo $(\nu' \; \nu \; \nu \; \nu' \; .)$, nulla potendosi affermare della classe di δ', la quale dipende dal comportamento del complesso lineare osculatore lungo t alla rigata delle tangenti di Γ; comportamento non determinato, in quest'ultimo caso, dai soli caratteri ν, ν'.

(2) E in ambo i casi lo S_3 e lo S_4 osculatori in T a δ' coincidono rispettivamente con lo S_3 e con lo S_4 polari della retta s e del punto T; il ramo δ' è caratterizzato, nei due casi, rispett. dai simboli $(\nu' \; \nu'' \; \nu - \nu'' \; \nu'' \; \nu')$ e $(\nu' \; \nu'' \; \nu'' - \nu \; \nu \; \nu')$.

Un primo esempio di curve C_γ è offerto dalle asintotiche algebriche di una quadrica di S_4. Ogni tale asintotica è immagine della rigata delle tangenti di una curva sghemba algebrica appartenente ad un complesso lineare; e viceversa.

Un secondo esempio, essenzialmente diverso, di curve C_γ si ottiene nel modo seguente. Si consideri un'asintotica L algebrica, irriducibile, di una quadrica Q' di S_6; la varietà dei piani osculatori e la varietà degli S_3 osculatori di L, polari l'una dell'altra rispetto a Q', hanno lo stesso ordine; segando pertanto con un S_5 generico π la rigata delle tangenti di L, si ha una curva, appartenente ad S_5, del tipo voluto C_γ. Si perviene alla stessa C_γ segando con π la rigata delle tangenti dell'asintotica L' dedotta da L mediante l'omologia armonica che ha π come asse, e come centro il polo P di π rispetto a Q'. Le due asintotiche L, L' costituiscono insieme la completa intersezione di Q' e del cono di vertice P luogo delle rette polari, rispetto a Q', degli S_4 osculatori di C_γ.

Per le C_γ *razionali*, i due esempî addotti esauriscono tutti i casi possibili. Per dimostrarlo, basterà far vedere che ogni C_γ razionale appartenente ad S_5 può ottenersi come sezione della rigata delle tangenti di un'asintotica (razionale) di una quadrica di S_6.

3. Abbiasi dapprima una curva C qualunque appartenente ad $S_5 \equiv \pi$. Per la quadrica Q, contenente C e le sue tangenti, si conduca una quadrica Q', non cono, di S_6; le rette polari, rispetto a Q', degli S_4 osculatori di C sono le generatrici di un cono Δ, appartenente ad S_6, col vertice nel polo P di π rispetto a Q'; e l'intersezione totale di questo cono con la quadrica Q' è una curva, che indichiamo con L, mutata in sè dall'omologia armonica ω che ha π come asse e P come centro.

Si consideri la corrispondenza (1, 2) fra le due curve C, L che nasce associando a ogni punto X di C i due punti X', X'' di L situati sulla generatrice del cono Δ polare dello S_4 osculatore in X a C. Il piano tangente al cono Δ lungo la generatrice $PX'X''$ contiene le tangenti t', t'' ad L in X', X'', e coincide col piano polare (rispetto a Q') dello S_3 osculatore in X a C; perciò (come questo stesso S_3) esso è tangente in X alla quadrica Q', e la taglia nelle due rette XX', XX''; onde le t', t'', tangenti rispett. in X' e X'' a Q' e a questa sezione piana, coincideranno rispettivamente con le stesse rette XX', XX''.

Analogamente, lo spazio S_3 osculatore al cono Δ lungo la generatrice $PX'X''$ è polare rispetto a Q' del piano osculatore a C nel punto X; esso contiene i due piani osculatori a L nei punti X', X'', i quali passano per la tangente t a C nel punto X, e costituiscono la sua intersezione con Q'. La L è perciò un'asintotica della quadrica Q', e la C è doppia per la rigata delle tangenti di L.

Se poi C è una C_γ, e perciò *nessuno* dei suoi piani osculatori sta (in Q e quindi) in Q', negli spazi S_3 polari di quei piani, spazi che segano su Q'

le coppie di piani tX', tX'', non potranno mai questi ultimi due piani coincidere. Invero un piano tangente a Q' lungo una retta ha un S_3 polare che sega Q' in due piani per questa retta; e solo quando quel primo piano sta su Q', questi ultimi due coincidono fra loro (e con esso). Per conseguenza, se L è irriducibile, l'involuzione delle coppie di punti $(X'X'')$, riferita birazionalmente a C_γ, è priva di punti doppî. Se dunque C_γ è razionale, poichè una g_2^1 (lineare) ha sempre punti doppî, si conclude che L dovrà necessariamente spezzarsi in due asintotiche L_1, L_2 razionali, irriducibili (come C_γ), e omologhe in ω. La C_γ stessa si ottiene pertanto come sezione iperpiana (semplice) della rigata delle tangenti di L_1 (o L_2) (¹).

Se invece C_γ non è razionale, si potrà ottenere per questa via, in generale, soltanto la stessa curva contata due volte.

Matematica. — *Direzioni concorrenti sopra una superficie spiccate dai punti di una curva.* Nota di A. Myller, presentata dal Socio T. Levi-Civita (²).

Partendo dal principio che sta alla base del concetto di parallelismo sopra una superficie, introdotto nella scienza dal sig. T. Levi-Civita, si è naturalmente condotti a ricercarne una generalizzazione proiettiva. A tale estensione si giunge attraverso la nozione di fascio di direzioni lungo una curva sopra una superficie.

Sia C una linea tracciata sulla superficie S. Facciamo corrispondere, ad ogni punto M di C, una direzione definita mediante una tangente g alla superficie, uscente da quel punto. Consideriamo la sviluppabile D circoscritta alla superficie S lungo la linea C e fissiamo pure le direzioni g sulla superficie D.

Diremo che le direzioni g sono concorrenti (formano fascio) nel senso di Levi-Civita, lungo la curva C di S, quando le stesse direzioni, pensate come invariabilmente legate alla superficie D, diventano concorrenti nel senso ordinario dopo l'applicazione della sviluppabile D sopra un piano.

Consideriamo sulle rette g, g', ... la serie di punti I, I', ... che vengono a sovrapporsi quando si applichi la sviluppabile D sopra un piano. È ovvio che ogni retta g contiene uno solo di questi punti. Ciò posto, dimostreremo che:

(¹) Però l'intersezione completa di questa rigata collo spazio S_5 di $C\gamma$ può comprendere anche qualche tangente di L (e di $C\gamma$).

(²) Presentata nella seduta del 13 aprile 1924.