ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

le coppie di piani tX', tX'', non potranno mai questi ultimi due piani coincidere. Invero un piano tangente a Q' lungo una retta ha un S_3 polare che sega Q' in due piani per questa retta; e solo quando quel primo piano sta su Q', questi ultimi due coincidono fra loro (e con esso). Per conseguenza, se L è irriducibile, l'involuzione delle coppie di punti $(X'X'')$, riferita birazionalmente a C_γ, è priva di punti doppî. Se dunque C_γ è razionale, poichè una g_2^1 (lineare) ha sempre punti doppî, si conclude che L dovrà necessariamente spezzarsi in due asintotiche L_1, L_2 razionali, irriducibili (come C_γ), e omologhe in ω. La C_γ stessa si ottiene pertanto come sezione iperpiana (semplice) della rigata delle tangenti di L_1 (o L_2) [1].

Se invece C_γ non è razionale, si potrà ottenere per questa via, in generale, soltanto la stessa curva contata due volte.

Matematica. — *Direzioni concorrenti sopra una superficie spiccate dai punti di una curva.* Nota di A. Myller, presentata dal Socio T. Levi-Civita [2].

Partendo dal principio che sta alla base del concetto di parallelismo sopra una superficie, introdotto nella scienza dal sig. T. Levi-Civita, si è naturalmente condotti a ricercarne una generalizzazione proiettiva. A tale estensione si giunge attraverso la nozione di fascio di direzioni lungo una curva sopra una superficie.

Sia C una linea tracciata sulla superficie S. Facciamo corrispondere, ad ogni punto M di C, una direzione definita mediante una tangente g alla superficie, uscente da quel punto. Consideriamo la sviluppabile D circoscritta alla superficie S lungo la linea C e fissiamo pure le direzioni g sulla superficie D.

Diremo che le direzioni g sono concorrenti (formano fascio) nel senso di Levi-Civita, lungo la curva C di S, quando le stesse direzioni, pensate come invariabilmente legate alla superficie D, diventano concorrenti nel senso ordinario dopo l'applicazione della sviluppabile D sopra un piano.

Consideriamo sulle rette g, g', ... la serie di punti I, I', ... che vengono a sovrapporsi quando si applichi la sviluppabile D sopra un piano. È ovvio che ogni retta g contiene uno solo di questi punti. Ciò posto, dimostreremo che:

[1] Però l'intersezione completa di questa rigata collo spazio S_5 di $C\gamma$ può comprendere anche qualche tangente di L (e di $C\gamma$).

[2] Presentata nella seduta del 13 aprile 1924.

La curva C′, luogo dei punti I, incontra ortogonalmente i piani tangenti alla superficie S lungo la curva C.

Siano, infatti, P, P′ i piani tangenti nei punti consecutivi M, M′ di C, e indichiamo con k la loro retta d'intersezione. Nel processo di spiegamento della superficie D nel piano P, il piano P′ viene ribaltato di un angolo infinitesimo attorno alla retta k. Ora, per l'ipotesi, questa rotazione porta il punto I′ della retta g' nel punto I della retta g, onde segue che l'arco infinitesimo II′ di C, è normale al piano P.

Siano $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ le coordinate di un punto generico della superficie S; $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ quelle di un punto M della linea C, come funzione dell'arco s di C; $\alpha(s)$, $\beta(s)$, $\gamma(s)$ i coseni di direzione della retta g uscente dal punto M; ϱ la distanza MI.

Scriviamo le coordinate del punto I:

$$x + \varrho\alpha\,,\ y + \varrho\beta\,,\ z + \varrho\gamma\,;$$

i parametri di direzione della tangente in questo punto alla curva C′ saranno

$$\frac{dx}{ds} + \varrho\frac{d\alpha}{ds} + \alpha\frac{d\varrho}{ds} \text{ ecc.}$$

Esprimendo che quest'ultima retta è perpendicolare al piano P, si ha

$$\frac{\dfrac{dx}{ds} + \varrho\dfrac{d\alpha}{ds} + \alpha\dfrac{d\varrho}{ds}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{dy}{ds} + \varrho\dfrac{d\beta}{ds} + \beta\dfrac{d\varrho}{ds}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{dz}{ds} + \varrho\dfrac{d\gamma}{ds} + \gamma\dfrac{d\varrho}{ds}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}}$$

Donde, moltiplicando numeratori e denominatori successivamente per

$$\frac{\partial x}{\partial u}\,,\ \frac{\partial y}{\partial u}\,,\ \frac{\partial z}{\partial u}\,;\ \frac{\partial x}{\partial v}\,,\ \frac{\partial y}{\partial v}\,,\ \frac{\partial z}{\partial v}\,,$$

si ricava

$$\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{dx}{ds} + \varrho\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\varrho}{ds}\sum\frac{\partial x}{\partial u}\alpha = 0$$

$$\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dx}{ds} + \varrho\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{d\alpha}{ds} + \frac{d\varrho}{ds}\sum\frac{\partial x}{\partial v}\alpha = 0\,.$$

Ma, avendosi

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u}u' + \frac{\partial x}{\partial v}v'\,,\ldots\ldots$$

$$\alpha = \frac{\partial x}{\partial u}\bar{u}' + \frac{\partial x}{\partial v}\bar{v}'\,,\ldots\ldots$$

le equazioni precedenti si scrivono (colle solite notazioni)

$$\mathrm{E}u' + \mathrm{F}v' + \frac{d\varrho}{ds}(\mathrm{E}\bar{u}' + \mathrm{F}\bar{v}') +$$

$$+ \varrho\left[\tfrac{1}{2}\mathrm{E}_u u'\bar{u}' + \tfrac{1}{2}\mathrm{E}_v v'\bar{u}' + \tfrac{1}{2}\mathrm{E}_v u'\bar{v}' + (\mathrm{F}_v - \tfrac{1}{2}\mathrm{G}_u) v'\bar{v}' + \mathrm{E}\frac{d\bar{u}'}{ds} + \mathrm{F}\frac{d\bar{v}'}{ds}\right] = 0$$

$$\mathrm{F}u' + \mathrm{G}v' + \frac{d\varrho}{ds}(\mathrm{F}\bar{u}' + \mathrm{G}\bar{v}') +$$

$$+ \varrho\left[(\mathrm{F}_u - \tfrac{1}{2}\mathrm{E}_v) u'\bar{u}' + \tfrac{1}{2}\mathrm{G}_u v'\bar{u}' + \tfrac{1}{2}\mathrm{G}_u u'\bar{v}' + \tfrac{1}{2}\mathrm{G}_v v'\bar{v}' + \mathrm{F}\frac{d\bar{u}'}{ds} + \mathrm{G}\frac{d\bar{v}'}{ds}\right] = 0.$$

Sottraendo queste equazioni dopo averle moltiplicate rispettivamente per G, F; F, E risultano le seguenti equazioni differenziali delle direzioni concorrenti nel senso di Levi-Civita:

$$\varrho\frac{d\bar{u}'}{ds} + u' + \frac{d\varrho}{ds}\bar{u}' + \varrho\left[\begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix} u'\bar{u}' + \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}(u'\bar{v}' + v'\bar{u}') + \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix} v'\bar{v}'\right] = 0,$$

$$\varrho\frac{d\bar{v}'}{ds} + v' + \frac{d\varrho}{ds}\bar{v}' + \varrho\left[\begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix} u'\bar{u}' + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}(u'\bar{v}' + v'\bar{u}') + \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix} v'\bar{v}'\right] = 0.$$

È facile dedurne la condizione affinchè le tangenti alle linee $v = \text{cost}$ siano concorrenti nel senso di Levi-Civita lungo le linee $u = \text{cost}$; essa è

$$\frac{d}{dv}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} = 0.$$

Le rette g, di cui le direzioni sono concorrenti lungo la curva C, generano una superficie rigata (g), sulla quale la curva corrispondente C′ è una traiettoria ortogonale delle generatrici. Notiamo ancora che la curva C è il luogo dei centri di curvatura geodetica per la curva C′ e che i piani tangenti alla rigata (g) in punti corrispondenti M e I di C e di C′ sono perpendicolari.