ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Matematica. — *Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza e calcolo di una soluzione periodica per il più generale sistema di equazioni differenziali ordinarie.* Nota di MAURO PICONE, presentata dal Socio BIANCHI [1].

Le assegnate p funzioni reali $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_p)$ $(i = 1, 2, \dots, p)$ delle $p+1$ variabili reali $t, x_1, x_2, \dots, x_p$, siano finite e continue in un certo insieme I di punti dello spazio $(t, x_1, \dots, x_p)$. In questa breve Nota do condizioni necessarie e condizioni sufficienti affinchè il seguente sistema di equazioni differenziali ordinarie,

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_p) \quad (i = 1, 2, \dots, p), \tag{1}$$

possieda una soluzione periodica di assegnato periodo T, e do anche un metodo di calcolo approssimato di una tale soluzione, il quale può ritenersi soddisfacente sopratutto dal punto di vista delle pratiche applicazioni.

Mi è grato dichiarare che a ciò sono stato condotto in uno studio per una questione di elettrotecnica pratica propostomi dal prof. G. Vallauri.

1. CONDIZIONE NECESSARIA. — Esista una soluzione periodica, di periodo T, $x_1(t), \dots, x_p(t)$ delle equazioni (1), e sia costituita da funzioni continue. Sussistendo le (1), riusciranno altresì continue le derivate prime di queste funzioni. In virtù di tale continuità, la serie di Fourier della derivata $x'_i(t)$ $(i = 1, \dots, p)$ converge in media, nell'intervallo $(0, T)$, verso quella derivata; e, poichè

$$\int_0^T x'_i(t)\, dt = x_i(T) - x_i(0) = 0,$$

quella serie manca del termine indipendente da t. Posto $2\pi/T = \alpha$, si abbia

$$\frac{dx_i}{dt} \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_{ik} \cos k\alpha t + b_{ik} \operatorname{sen} k\alpha t). \tag{2}$$

Indicheremo con $u_i^{(n)}(t)$ la somma dei primi n termini della serie ora scritta. Detto a_i il valore di x_i per $t = 0$ e posto

$$v_i^{(n)}(t) = a_i + \int_0^t u_i^{(n)}(\tau)\, d\tau = a_i + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} [a_{ik} \operatorname{sen} k\alpha t - b_{ik}(\cos k\alpha t - 1)],$$

[1] Presentata nella seduta del 13 aprile 1924.

si avrà

$$x_i(t) = \lim_{n \to \infty} v_i^{(n)}(t) = a_i + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [a_{ik} \operatorname{sen} k\alpha t - b_{ik}(\cos k\alpha t - 1)],$$

uniformemente, per t variabile in $(0, T)$. Pertanto, e per le note proprietà della convergenza in media, si avrà

$$(3) \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{p} \int_0^T \left[u_i^{(n)}(t) - f_i\left(t, v_1^{(n)}(t), \ldots, v_p^{(n)}(t)\right) \right]^2 dt =$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \int_0^T \left[\frac{dx_i}{dt} - f_i\left(t, x_1(t), \ldots, x_p(t)\right) \right]^2 dt = 0.$$

Ciò posto, riguardando come variabili i $p(2n+1)$ coefficienti a_i, a_{ik}, b_{ik}, consideriamo, per ogni valore di n, la seguente funzione di quelle variabili:

$$\varrho_n(\ldots, a_i, \ldots, a_{ik}, \ldots, b_{ik}, \ldots) =$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \int_0^T \left[u_i^{(n)}(t) - f_i\left(t, v_1^{(n)}(t), \ldots, v_p^{(n)}(t)\right) \right]^2 dt,$$

e diciamo $I^{(n)}$ quel ben determinato insieme dello spazio a $p(2n+1)$ dimensioni, nel quale riesce definita la funzione ϱ_n. Questa funzione è continua in $I^{(n)}$ e vi possiede un estremo inferiore non negativo σ_n, non crescente al crescere di n. Ebbene, mi limiterò a considerare la questione nella seguente ipotesi: *Per ogni valore di n, la funzione ϱ_n è dotata, in $I^{(n)}$, di minimo assoluto.*

In tale ipotesi (in pratica, assai poco restrittiva) indicheremo con $A_i^{(n)}, A_{ik}^{(n)}, B_{ik}^{(n)}$ valori di a_i, a_{ik}, b_{ik} per i quali ϱ_n assume il valore σ_n, e porremo

$$(4) \quad \begin{cases} U_i^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} (A_{ik}^{(n)} \cos k\alpha t + B_{ik}^{(n)} \operatorname{sen} k\alpha t), \\ V_i^{(n)}(t) = A_i^{(n)} + \int_0^t U_i^{(n)}(\tau)\, d\tau = \\ \qquad = A_i^{(n)} + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{n} \left[A_{ik}^{(n)} \operatorname{sen} k\alpha t - B_{ik}^{(n)} (\cos k\alpha t - 1) \right]. \end{cases}$$

In virtù della (3) e per essere sempre $\sigma_n \leq \varrho_n$, ne segue il criterio:

Condizione necessaria affinchè il sistema (1) *possieda una soluzione periodica, di periodo* T, *costituita da funzioni continue, è che, detti* $A_i^{(n)}, A_{ik}^{(n)}, B_{ik}^{(n)}$ *quali si vogliano valori delle* a_i, a_{ik}, b_{ik} *per i quali* ϱ_n *assume il suo minimo valore, e fatte le posizioni* (4), *si abbia*

$$(5) \quad \lim_{n \to \infty} \sigma_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{p} \int_0^T \left[U_i^{(n)}(t) - f_i\left(t, V_1^{(n)}(t), \ldots, V_p^{(n)}(t)\right) \right]^2 dt = 0.$$

In ogni caso σ_n non cresce al crescere di n.

2. Condizioni sufficienti. — Soddisfatta la condizione necessaria (5), supponiamo che sia possibile scegliere le $A_i^{(n)}$, $A_{ik}^{(n)}$, $B_{ik}^{(n)}$ in maniera che, per ogni valore dell'indice i, il sistema

$$(6) \qquad A_i^{(n)}, A_{i1}^{(n)}, B_{i1}^{(n)}, \dots, A_{in}^{(n)}, B_{in}^{(n)},$$

al divergere di n, sia, come dice Schmidt [1], *convergente fortemente*: si abbia cioè

$$(7) \quad \lim_{n \to \infty} \left[(A_i^{(n+q)} - A_i^{(n)})^2 + \sum_{k=1}^{n} \left\{ (A_{ik}^{(n+q)} - A_{ik}^{(n)})^2 + (B_{ik}^{(n+q)} - B_{ik}^{(n)})^2 \right\} + \right.$$
$$\left. + \sum_{l=n+1}^{n+q} \left\{ (A_{il}^{(n+q)})^2 + (B_{il}^{(n+q)})^2 \right\} \right] = 0,$$

uniformemente al variare dell'intiero positivo q. Si ha allora che: 1°) al divergere di n, la funzione $U_i^{(n)}(t)$ converge in media verso una funzione $U_i(t)$, di quadrato sommabile in $(0, T)$; 2°) la funzione $V_i^{(n)}(t)$ converge, uniformemente in $(0, T)$, verso una funzione $V_i(t)$ continua in $(0, T)$; 3°) posto $\lim A_i^{(n)} = A_i$, $\lim A_{ik}^{(n)} = A_{ik}$, $\lim B_{ik}^{(n)} = B_{ik}$, riesce

$$U_i(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (A_{ik} \cos k\alpha t + B_{ik} \operatorname{sen} k\alpha t) \quad \text{(convergenza in media)},$$

$$V_i(t) = A_i + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [A_{ik} \operatorname{sen} k\alpha t - B_{ik} (\cos k\alpha t - 1)] \quad \text{(converg. unif.)},$$

$$V_i(t) = A_i + \int_0^t U_i(\tau)\, d\tau,$$

$$0 = \lim_{n \to \infty} \sigma_n = \sum_{i=1}^{p} \int_0^T \left[U_i(t) - f_i\Big(t, V_1(t), \dots, V_p(t)\Big) \right]^2 dt.$$

Ne segue che, fatta al più eccezione per un insieme di valori di t, di misura lebesghiana nulla, la $U_i(t)$ è finita in $(0, T)$ ed è la derivata di $V_i(t)$, risultando $dV_i/dt = f_i(t, V_1, \dots, V_p)$. Con le funzioni V_i possiamo dunque ritenere di avere ottenuta una soluzione periodica del sistema (1). E pertanto:

Condizioni sufficienti affinchè il sistema (1) *possieda una soluzione periodica, di periodo* T, *costituita di funzioni assolutamente continue, sono che si verifichi la* (5) *e sia possibile scegliere le* $A_i^{(n)}$, $A_{ik}^{(n)}$, $B_{ik}^{(n)}$ *minimizzanti* ϱ_n, *in maniera che il sistema* (6), *per ogni indice* i, *converga fortemente al divergere di* n.

3. Osservazioni. — I^a. Se le f_i sono dotate di derivate prime rispetto alle x, finite e continue, e se, per ogni n, l'insieme $I^{(n)}$ riesce aperto, le $A_i^{(n)}$, $A_{ik}^{(n)}$, $B_{ik}^{(n)}$ sono soluzioni del seguente sistema di $p(2n+1)$ equazioni:

$$(8) \qquad \frac{\partial \varrho_n}{\partial a_i} = 0, \quad \frac{\partial \varrho_n}{\partial a_{ik}} = 0, \quad \frac{\partial \varrho_n}{\partial b_{ik}} = 0.$$

[1] E. Schmidt, *Ueber die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlichvielen unbekannten*, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, tomo XXV, 1908, pag. 58.

Ciò, in particolare, avviene se le equazioni (1) sono lineari; in tal caso le (8) risultano compatibili e pur esse lineari, ed esiste sempre il minimo assoluto di ϱ_n [cfr. le mie *Lezioni d'Analisi infinitesimale*, vol. I, pag. 339 (Circolo matematico di Catania; Catania, R. Università)].

II^a. Le funzioni $\xi_1, \dots, \xi_p$ della t siano in $(0, T)$ derivabili e con derivata di quadrato sommabile: diremo che esse *verificano in* $(0, T)$ *le equazioni* (1) *con un errore globale* ϱ se si ha

$$\varrho = \sum_{i=1}^{p} \int_0^T \left[\frac{d\xi_i}{dt} - f_i(t, \xi_1, \dots, \xi_p) \right]^2 dt.$$

Se l'errore ϱ è nullo, le ξ_i sono integrali del sistema (1). Ciò posto, vogliamo osservare che: in ogni caso, nella più completa ignoranza circa l'esistenza o meno di una soluzione periodica di periodo T per il sistema (1), prefissate le funzioni $1, \cos \alpha t, \operatorname{sen} \alpha t, \dots, \cos n\alpha t, \operatorname{sen} n\alpha t$, se si domanda di soddisfare alle (1) con una combinazione lineare di tali funzioni, il miglior modo di ottenere ciò, commettendo cioè il minimo errore globale possibile, è quello di prendere le combinazioni $V_i^{(n)}$. Con tali combinazioni, il detto errore σ_n non cresce mai al crescere di n. Sia accertata l'esistenza di una soluzione periodica (di periodo T) per il sistema (1), ciò che potrebbe essere dato dall'esperienza nel caso che le (1) traducano un fatto sperimentale; la condizione (5) è allora certo verificata. Se prendiamo gli sviluppi di Fourier delle funzioni costituenti l'indicata soluzione, arrestati ciascuno al termine $(2n+1)^{mo}$, si soddisferà sempre alle (1) commettendo un errore globale non inferiore a σ_n; converrà dunque in pratica, anche se non è assicurata la (7), sostituire ai detti sviluppi arrestati le combinazioni $V_i^{(n)}$. Se è assicurata la (7), le $V_i^{(n)}$ possono però ben riguardarsi, al crescere di n, come successive approssimazioni di una soluzione periodica per il sistema (1), e precisamente della soluzione di cui si conosce l'esistenza se si sapesse inoltre che essa è unica.

III^a. Per i punti di I la variabile t possa variare in un intervallo $(0, T+\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$. Allora, se non tutte le f_i sono periodiche e di periodo T rispetto alla t, le funzioni di un'eventuale soluzione periodica, di periodo T, per il sistema (1), devono soddisfare in $(0, \varepsilon)$ alle equazioni $f_i(t, x_1, \dots, x_p) = f_i(t+T, x_1, \dots, x_p)$ $(i = 1, \dots, p)$. Se per i punti di I la variabile t può variare da $-\infty$ a $+\infty$, quelle funzioni devono verificare le (in generale infinite) equazioni

$$f_i(t, x_1, \dots, x_p) = f_i(t + kT, x_1, \dots, x_p)$$
$$(i = 1, \dots, p;\ k = \dots, -1, 1, \dots).$$

In tali casi, dunque, solo eccezionalmente potrà esistere una soluzione periodica di periodo T.