ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

cromosoma della cellula sessuale maschile è corto, mentre i due cromosomi della cellula femminile sono molto più lunghi.

Dei quattro nuclei, che compongono l'apparato nucleare dell'*Individuo misto* di *Crjptochilum*, uno solo assume la funzione sessuale per la formazione dei gameti.

Anche tale fatto potrebbe avvalorare il ravvicinamento sopra cennato, cioè che tra l'*Individuo misto* e la *prima cellula embrionale* esista una certa identità. In alcuni Metazoi, infatti, fu osservato che la prima cellula sessuale si differenzia precocemente dalla 1ª cellula embrionale e da un determinato cromosoma (Boveri, Rückert ed altri), che si trasmette integro alle successive cellule della *linea germinale*, mentre gli altri cromosomi sono ridotti e in parte distrutti.

Nell'*Individuo misto* del nostro Ciliato si realizza, sebbene in forma elementare, la stessa condizione di un Metazoo, in quanto che solo uno dei 4 nuclei, il micronucleo, permane e si trasmette ai nuovi individui, mentre gli altri, i 3 macronuclei, hanno un'esistenza effimera e transitoria.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sulla stabilità del rotolamento di un disco.* Nota di G. Vranceanu, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Consideriamo il movimento per puro rotolamento, sopra un piano orizzontale H, di un disco circolare pesante, o, più generalmente, di un solido (quale una ruota), che si appoggia sul piano, lungo un orlo circolare. Detto comunque S tale solido, supporremo:

a) che il centro di gravità G di S coincida col centro del cerchio d'appoggio;

b) che l'ellissoide baricentrale di inerzia del sistema sia di rivoluzione intorno alla perpendicolare Gz^* al piano del cerchio.

Il moto si intenderà riferito ad un sistema di assi fissi $\Omega\xi\eta\zeta$, di cui $\Omega\zeta$ è verticale, e $\Omega\xi$, $\Omega\eta$ appartengono al piano orizzontale H. Conviene introdurre altresì una terna $Oxyz$, mobile anche rispetto al solido (terna stereonodale) così definita: l'origine O coincide in ogni istante col punto di contatto fra il disco e il piano orizzontale H; Oz è parallelo a Gz^* (formando un angolo $\leq \pi/2$ colla verticale ascendente); Oy coincide con OG, e quindi Ox colla tangente al disco.

Indichiamo con m la massa, con a il raggio del disco, rappresentando i momenti di inerzia assiali ed equatoriali, relativi al baricentro, con $m\gamma a^2$, $m\alpha a^2$: γ ed α sono con ciò delle costanti numeriche, le quali, nel caso di

un disco omogeneo propriamente detto, si riducono notoriamente ad 1/2 e ad 1/4.

Designino p, q, r le componenti, secondo la nostra terna stereonodale $Oxyz$, della velocità angolare (assoluta) del solido; θ, φ, ψ, i soliti angoli di Eulero, che individuano l'orientazione del solido stesso (cioè di Gz^* e di due altri assi solidali col disco), rispetto agli assi fissi $\Omega\xi\eta\zeta$. Con ciò, θ rappresenta l'angolo del disco col piano orizzontale H, φ l'angolo di rotazione del disco intorno a Gz^*, ψ l'angolo di $\Omega\xi$ ed Ox. Accanto alle equazioni cinematiche

$$(1)\qquad \begin{cases} p = \theta', \\ q = \psi' \sin\theta, \\ r = \psi' \cos\theta + \varphi', \end{cases}$$

si ricavano (dal teorema dei momenti rispetto al punto O) le equazioni dinamiche [1]

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} (\alpha+1)\dfrac{dp}{dt} + (q(\gamma+1)r - \alpha q \operatorname{cotg}\theta) + \dfrac{g}{a}\cos\theta = 0, \\ \alpha \dfrac{dq}{dt} + p(\alpha q \operatorname{cotg}\theta - \gamma r) = 0, \\ (\gamma+1)\dfrac{dr}{dt} - pq = 0, \end{cases}$$

in cui g è l'accelerazione della gravità, e che, insieme colle (1), sono atte a determinare il moto del disco (più precisamente i tre angoli θ, φ, ψ, ossia l'orientazione del disco); potendosi poi, con semplici quadrature, desumere anche il moto del punto di contatto O, sul piano di appoggio. Tenuto conto di questo, si può dire che il problema è essenzialmente compendiato nelle (1) e (I). O ancora, dato che φ e ψ non compariscono esplicitamente nelle (I), possiamo risguardare come equazioni fondamentali le (I), cui si associa la prima delle (1)

$$(\mathrm{II})\qquad \theta' = p,$$

che contengono complessivamente 4 funzioni incognite p, q, r, θ, da assegnarsi in termini del tempo t. Si vede ben facilmente che il nostro sistema (I), (II), ammette la soluzione particolare

$$(2)\qquad p = 0,\ q = 0,\ r = c \text{ (costante)},\ \theta = \pi/2,$$

cui, in virtù delle (1), si collegano i valori $\psi' = 0$, $\varphi' = c$; val quanto dire (per essere $\psi' = \theta$), che il rotolamento del disco avviene su traccia rettilinea, in modo uniforme ($\varphi' = c$), restando inoltre il piano del disco costantemente verticale ($\theta = \pi/2$).

[1] Vedi Appell, *Traité de mécanique*, vol. II (ed. III), pp. 248, 389.

2. Vogliamo studiare la stabilità della soluzione particolare (2).

Applichiamo dapprima il metodo delle piccole oscillazioni, introducendo nelle (I), (II), al posto di θ e r, gli argomenti y e ϱ in base alle posizioni

$$\theta = \pi/2 - y \quad , \quad r = c + \varrho \, , \tag{3}$$

con che y e ϱ vanno trattati, al pari di q e di $p = -y'$ (l'apice sta per d/dt), come quantità di prim'ordine. Sostituendo nelle (I) e trascurando i termini superiori al primo, si ha

$$\left\{ \begin{aligned} & -(\alpha+1)\,y'' + (\gamma+1)\,c\,q + \frac{g}{a}\,y = 0 \, , \\ & \alpha q' + \gamma\, c\, y' = 0 \, , \\ & \varrho' = 0 \, . \end{aligned} \right. \tag{I'}$$

Le due ultime dànno $q = -\dfrac{c\gamma}{\alpha}\,y + h_1$, $\varrho = h_2$, dove h_1 , h_2 sono costanti (molto piccole). Introducendo nella prima delle (I'), abbiamo ulteriormente

$$\alpha(\alpha+1)\,y'' + \left(\gamma(\gamma+1)\,c^2 - \frac{g}{a}\,\alpha\right) y = h_1\, c\, \alpha(\gamma+1) \, . \tag{I''}$$

La stabilità o la instabilità della soluzione (2) dipende, in conformità, dal segno della quantità $\gamma(\gamma+1)\,c^2 - \dfrac{g}{a}\,\alpha$. Risulta, dalle ricerche di Liapounoff [1], che il metodo delle piccole oscillazioni porta a conclusioni rigorose nel caso della instabilità; mentre per la stabilità fornisce in generale solo delle condizioni necessarie.

3. Voglio dimostrare adesso, come applicazione della mia Nota precedente [2], che la condizione

$$k = \gamma(\gamma+1)\,c^2 - \frac{g}{a}\,\alpha > 0 \tag{4}$$

è effettivamente sufficiente, per la stabilità della soluzione (2), intesa in senso rigoroso. All'uopo poniamo $\theta = \pi/2 - y$, come già nella prima delle (3), ma senza più trattare y come infinitesimo (y è l'angolo della verticale col piano del disco). Osserviamo che, se in una soluzione delle (I), (II), l'inclinazione θ non è costante, possiamo (almeno durante l'intervallo di tempo in cui $\theta' \neq 0$) dividere le ultime due equazioni (I) per $p = \theta' = -y'$. Si ha così

$$\left\{ \begin{aligned} & \alpha \frac{dq}{dy} = \alpha q \operatorname{tg} y - \gamma r \, , \\ & (\gamma+1)\frac{dr}{dy} = -q \, . \end{aligned} \right. \tag{III}$$

[1] *Stabilité du mouvement*, Annales de Toulouse, série II, tome IX, pag. 203. Cfr. altresì Levi-Civita, *Sopra alcuni criteri di instabilità*, Annali di Matematica, serie III, tomo V, 1901, Cap. III.

[2] *Sul teorema di Weierstrass*, questi Rendiconti vol. XXXIII, serie 5ª, pag. 270.

Quanto alla prima equazione (I), conviene immaginarla sostituita dall'integrale delle forze vive, il quale (come agevolmente si verifica) può essere posto sotto la forma

$$\text{(IV)} \quad (\alpha+1)\,y'^2 + \alpha\, q^2(y) + (\gamma+1)\, r^2(y) + 2\,\frac{g}{a}\cos y = h \quad (h \text{ costante}).$$

Le equazioni (III) forniscono q ed r in funzione regolare di y, per y abbastanza piccolo, e l'integrale delle forze vive (IV) permette ulteriormente di definire y in funzione di t, mediante una quadratura. La (IV) rientra nel tipo

$$y'^2 = \mathrm{Y}(y)$$

con $\mathrm{Y}(y)$ funzione regolare di y (per y abbastanza piccolo), di cui è ben nota la seguente proprietà: Se y si trova inizialmente compreso fra due radici semplici di $\mathrm{Y}(y) = 0$ (appartenenti entrambe al campo di regolarità), esso oscilla indefinitamente fra tali due radici. A noi basterà combinare questo risultato classico con la già citata mia Nota, per riconoscere la stabilità della (2), quando sia verificata la disuguaglianza (4).

4. Ciò posto, riprendiamo in considerazione una soluzione generica del sistema (III), (IV), definita da valori iniziali prossimi ai valori stazionarî (2) e, del resto, qualisivogliano:

$$\text{(5)} \qquad q = x_2\,,\ r = c + x_3\,,\ y = x_1\,,\ y' = -p = x_4\,.$$

Deriviamo una volta le (III)

$$\text{(III')} \quad \begin{cases} \alpha\,\dfrac{d^2q}{dy^2} = \alpha\,\dfrac{dq}{dy}\,\gamma q\, y + \alpha q\,\dfrac{1}{\cos^2 y} - \gamma\,\dfrac{dr}{dy}\,. \\[2ex] (\gamma+1)\,\dfrac{d^2r}{dy^2} = -\dfrac{dq}{dy}\,. \end{cases}$$

Abbiamo, in corrispondenza alle condizioni iniziali (5),

$$\text{(6)} \quad \begin{cases} \dfrac{dq}{dy} = -\dfrac{\gamma c}{\alpha} + \mathrm{Q}_1\,, & \dfrac{dr}{dy} = \mathrm{R}_1 \\[2ex] \dfrac{d^2q}{dy^2} = \mathrm{Q}_2\,, & \dfrac{d^2r}{dy^2} = \dfrac{\gamma c}{\alpha(\gamma+1)} + \mathrm{R}_2 \end{cases}$$

dove $\mathrm{Q}_1, \mathrm{R}_1, \mathrm{Q}_2, \mathrm{R}_2$ sono almeno di primo ordine nelle x_1, x_2, x_3.

La soluzione delle (III), definita dalle condizioni iniziali (5), è data in conformità da sviluppi tayloriani in serie di potenze dell'argomento $y - x_1$:

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} q = x_2 + \left(-\dfrac{\gamma c}{\alpha} + \mathrm{Q}_1\right)(y - x_1) + \mathrm{Q}_2\,\dfrac{(y-x_1)^2}{12} + \cdots \\[2ex] r = c + x_3 + \mathrm{R}_1(y - x_1) + \left(\dfrac{\gamma c}{\alpha(\gamma+1)} + \mathrm{R}_2\right)\dfrac{(y-x_1)^2}{12} + \cdots \end{cases}$$

uniformemente convergenti per y abbastanza prossimo ad x_1.

L'integrale delle forze vive (IV), tenuto conto delle condizioni iniziali (5), e delle (V), assume la forma

$$\text{(VI)} \quad (\alpha+1)\,y'^2 = (\alpha+1)\,x_4^2 + B_1(y-x_1) + (-k+B_2)(y-x_1)^2 + \cdots$$

dove B_1, B_2, sono almeno di primo ordine nelle x_1, x_2, x_3, e k è data dalla formula (4). Posto ulteriormente

$$y - x_1 = z \;,\; A_0 = \frac{(\alpha+1)\,x_4^2}{k} \;,\; A_1 = \frac{B_1}{k} \;,\; A_2 = \frac{B_2}{k} \,,$$

la (VI) diviene

$$\text{(VII)} \quad (\alpha+1)\,z'^2 = -k\,F(z, x_1, x_2, x_3, x_4) =$$
$$= -k\,(z^2 - A_0 - A_1 z - A^2 z^2 + \cdots).$$

La funzione F, che figura nel secondo membro, è olomorfa rispetto a tutti i 5 argomenti z, x_1, x_2, x_3, x_4, nell'intorno del valore 0 di tutti questi argomenti, e ha una radice doppia $z=0$, per $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Siamo in caso di applicare il teorema di Weierstrass, ed abbiamo

$$z^2 - A_0 - A_1 z - A_2 z^2 + \cdots \equiv (z^2 - p_1 z - p_2)\,(1 + \varphi(z|x)),$$

dove i primi termini dello sviluppo di p_1 e p_2 sono [1]

$$p_2 = \frac{(\alpha+1)}{k}\,x_4^2 \,,$$

$$p_1 = \frac{B_1^1}{k}$$

(B_1^1 è la parte di prim'ordine di B_1), e φ designa una funzione olomorfa di z e delle x, che s'annulla per $z = x = 0$. Tenendo conto di (4), i primi termini dello sviluppo del discriminante della equazione $z^2 - p_1 z - p_2 = 0$ sono una somma di quadrati $\left(\frac{(B_1^1)^2 + 4k(\alpha+1)\,x_4^2}{k^2}\right)$. Ne risulta che, per valori (reali) abbastanza piccoli delle x, le radici z_1, z_2 della equazione $z^2 - p_1 z - p_2 = 0$, sono sempre reali, di segni contrarii, e rimangono entrambe prossime a zero, quanto si vuole. Segue, da ciò, che z, in quanto inizialmente compresso fra z_1 e z_2, rimane indefinitamente in tale intervallo. Analoga conclusione vige per y, e quindi per θ, sicchè rimane dimostrato che, ogniqualvolta sia $k > 0$, per condizioni iniziali abbastanza prossime alle stazionarie (2), l'angolo θ rimane indefinitamente prossimo a $\pi/2$, quanto si vuole; c. d. d.

[1] Cfr. la mia Nota già citata.

In modo concettualmente identico si può studiare esaurientemente la stabilità delle ∞^2 soluzioni particolari, $\theta = \pi/2 - i$, $\varphi' = c$, $\psi' = -\omega$ (movimenti circolari del punto di contatto O, sotto inclinazione costante del disco, con velocità angolari costanti), dove le costanti i, c, ω sono legate dalla relazione

$$(\gamma - \alpha + 1)\,\omega^2 \cos i \sin i - (\gamma + 1)\,c\omega \cos i + g/a \sin i = 0 .$$

La stabilità di queste ∞^2 soluzioni si trova studiata in prima approssimazione, cioè col metodo delle piccole oscillazioni, nella recente *Dynamique des solides* del sig. Reveille (Paris 1923, pag. 334).

Astrofisica. — *La distribuzione del potere radiante sul disco degli astri determinata con l'Interferometro.* Nota di MENTORE MAGGINI, presentata dal Corrispondente A. BEMPORAD [1].

Due sono i metodi che permettono di conoscere la distribuzione dell'intensità luminosa sul disco apparente di un astro dall'aspetto delle frange d'interferenza: l'uno consiste nell'osservare le successive scomparse delle frange con l'aumentare della separazione dei fasci interferenti, l'altro nella stima della loro visibilità per determinati valori di questa separazione. In teoria ambedue i metodi possono venire impiegati; in pratica, ora l'uno ora l'altro si presta alle esigenze strumentali.

Durante le misure interferometriche di doppie e di piccoli diametri, da me effettuate a Catania, ho avuto occasione di tentare l'uno e l'altro sistema sul pianeta Urano e sul pianetino Vesta, giungendo alla conclusione che il disco apparente di questi astri presenterebbe, a somiglianza di quelli stellari, di quelli di Giove e Saturno, le regioni periferiche meno luminose di quelle centrali.

1. Le misure sul disco di Urano si eseguirono col primo metodo; questo è possibile perchè, date le dimensioni angolari del pianeta, il diametro del cerchio di fase costante al momento della seconda disparizione delle frange, è inferiore al diametro dell'obiettivo di Catania.

È noto che, se l_1 è la distanza fra le fenditure quando ha luogo la prima disparizione delle frange, il diametro apparente ε dell'astro è dato da

$$\varepsilon = 1.22\,\frac{\lambda}{l_1} . \tag{1}$$

Questo nel caso in cui la larghezza a delle fenditure sia trascurabile rispetto ad l; ma in pratica ciò non è quasi mai possibile; Hamy [2], e più recen-

[1] Presentata nella seduta del 4 maggio 1924.

[2] Bulletin astronomique, tome XVI, 1899, pag. 257.