ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla risoluzione numerica delle equazioni integrali di Fredholm.* Nota di FRANCESCO TRICOMI, presentata dal Socio CASTELNUOVO.

1. Il metodo più frequentemente usato per risolvere numericamente una data equazione integrale di Fredholm, di 2ª specie,

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 \mathrm{K}(x, y)\, \varphi(y)\, dy = f(x), \tag{1}$$

consiste nel costruire un nucleo di Goursat-Pincherle

$$\mathrm{K}^*(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\, \beta_k(y) \tag{2}$$

che approssimi il nucleo dato K, e sostituire alla (1) l'equazione congenere

$$\varphi^*(x) - \lambda \int_0^1 \mathrm{K}^*(x, y)\, \varphi^*(y)\, dy = f(x), \tag{3}$$

la cui risoluzione si riconduce, com'è ben noto, a quella di un sistema di n equazioni lineari ad n incognite.

In una Nota recente di Batemann (¹), in cui si trovano anche indicazioni bibliografiche sull'argomento, viene indicato un metodo, praticamente attuabile, per scegliere in modo opportuno le funzioni α_k e β_k. Nè in questo lavoro però, nè, che io sappia, in altri precedenti, si dimostra che la funzione $\varphi^*(x)$ costituisce effettivamente una buona approssimazione della funzione incognita $\varphi(x)$. Ritengo pertanto non privi d'interesse i seguenti calcoli che permettono di assegnare un limite superiore del valore assoluto della differenza $\varphi(x) - \varphi^*(x)$, supposto che, in tutto il *quadrato fondamentale*, sia sempre

$$|\mathrm{K}(x, y) - \mathrm{K}^*(x, y)| < \varepsilon. \tag{4}$$

2. Premettiamo anzitutto il seguente lemma sui determinanti: *Se*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix}$$

(¹) H. Batemann, *On the numerical solution of linear integral equations.* [Proc. of the Royal Society A., vol. 100 (1922), pagg. 441-449].

sono due determinanti di ordine n tali che, qualunque siano r ed s, si abbia sempre

$$|a_{rs}| < N \quad , \quad |a_{rs} - a'_{rs}| < \varepsilon ;$$

il modulo della differensa $\Delta - \Delta'$ *è certamente minore di*

$$n^{\frac{n}{2}}[(N+\varepsilon)^n - N^n] .$$

Infatti, possiamo porre

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} + (a'_{11} - a_{11}) & a_{12} + (a'_{12} - a_{12}) \cdots a_{1n} + (a'_{1n} - a_{1n}) \\ a_{21} + (a'_{21} - a_{21}) & a_{22} + (a'_{22} - a_{22}) \cdots a_{2n} + (a'_{2n} - a_{2n}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} + (a'_{n1} - a_{n1}) & a_{n2} + (a'_{n2} - a_{n2}) \cdots a_{nn} + (a'_{nn} - a_{nn}) \end{vmatrix}$$

da cui, scomponendo il determinante a secondo membro nella somma di tanti determinanti contenenti come elementi le a_{rs} oppure le differenze $a'_{rs} - a_{rs}$, si ha

$$(5) \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \Sigma \begin{vmatrix} a'_{11} - a_{11}\; a_{12} \cdots a_{1n} \\ a'_{21} - a_{21}\; a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ a'_{n1} - a_{n1}\; a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \Sigma \begin{vmatrix} a'_{11} - a_{11}\; a'_{12} - a_{12} \cdots a_{1n} \\ a'_{21} - a_{21}\; a'_{22} - a_{22} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ a'_{n1} - a_{n1}\; a'_{n2} - a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \Sigma \begin{vmatrix} a'_{11} - a_{11}\; a'_{12} - a_{12} \cdots a'_{1n} - a_{1n} \\ a'_{21} - a_{21}\; a'_{22} - a_{22} \cdots a'_{2n} - a_{2n} \\ \cdots\cdots \\ a'_{n1} - a_{n1}\; a'_{n2} - a_{n2} \cdots a'_{nn} - a_{nn} \end{vmatrix}$$

dove i sommatorii sono estesi a tutti i determinanti analoghi a quelli scritti, ma in cui le colonne con le differenze $a'_{rs} - a_{rs}$ occupano, invece che i primi posti, posti qualsiansi; si tratta dunque di sommatorii comprendenti rispettivamente $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}$, 1 termini.

Ciò posto, osserviamo:

1°) che il primo determinante del 2° membro della (5) non è altro se non Δ;

2°) che ciascun determinante del 1°, 2°, 3°, ... sommatorio ha rispettivamente 1, 2, 3, ... colonne di elementi, in modulo, minori di ε, e le rimanenti di elementi, in modulo, inferiori ad N. Quindi, pel teorema di Hadamard generalizzato [1], i moduli dei determinanti in discorso sono inferiori rispettivamente a

$$n^{\frac{n}{2}}\,\varepsilon\,N^{n-1},\; n^{\frac{n}{2}}\,\varepsilon^2\,N^{n-2},\; n^{\frac{n}{2}}\,\varepsilon^3\,N^{n-3},\ldots$$

Conseguentemente, dalla (5) potrà dedursi che

$$|\Delta-\Delta'|<\sum n^{\frac{n}{2}}\,\varepsilon\,N^{n-1}+\sum n^{\frac{n}{2}}\,\varepsilon^2 N^{n-2}+\cdots+\sum n^{\frac{n}{2}}\,\varepsilon^{n-1} N+\sum n^{\frac{n}{2}}\,\varepsilon^n:$$

cioè, tenendo conto del numero dei termini costituenti ciascun sommatorio,

$$|\Delta-\Delta'|<n^{\frac{n}{2}}\left[\binom{n}{1}\varepsilon N^{n-1}+\binom{n}{2}\varepsilon^2 N^{n-2}+\cdots+\binom{n}{n-1}\varepsilon^{n-1}N+\varepsilon^n\right];$$

ma la parentesi quadra, aumentata di N^n, costituisce lo sviluppo di $(N+\varepsilon)^n$; dunque avremo finalmente

$$|\Delta-\Delta'|<n^{\frac{n}{2}}\left[(N+\varepsilon)^n-N^n\right]. \tag{6}$$

c. d. d.

3. Dimostrato il lemma precedente, siamo in possesso degli elementi occorrenti per determinare un limite superiore di

$$|D(\lambda)-D^*(\lambda)|,$$

essendo $D(\lambda)$ e $D^*(\lambda)$ le funzioni D di Fredholm relative ai due nuclei K e K^*.

All'uopo, ricordando la serie che serve a definire $D(\lambda)$:

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 K\begin{pmatrix}z_1, z_2, \cdots z_n\\ z_1, z_2, \cdots z_n\end{pmatrix}dz_1\,dz_2\cdots dz_n,$$

osserviamo in primo luogo che, denotato con

$$K^*\begin{pmatrix}z_1, z_2, \cdots z_n\\ z_1, z_2, \cdots z_n\end{pmatrix}$$

il generico *determinante di Fredholm* relativo al nucleo K^*, si avrà

$$D(\lambda)-D^*(\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\left[K\begin{pmatrix}z_1, z_2, \cdots z_n\\ z_1, z_2, \cdots z_n\end{pmatrix}-K^*\begin{pmatrix}z_1, z_2 \cdots z_n\\ z_1, z_2, \cdots z_n\end{pmatrix}\right]dz_1\,dz_2\cdots dz_n. \tag{7}$$

In secondo luogo, osserviamo che, supposto che, in tutto il quadrato fondamentale, si abbia

$$|K(x,y)|<N, \tag{8}$$

[1] Si allude qui al teorema che: *Se in un determinante di ordine n i moduli degli elementi della* 1^a, 2^a, ... n^{esima} *colonna sono rispettivamente minori di* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, *il modulo del determinante è minore di*

$$n^{\frac{n}{2}}\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n.$$

È un'estensione immediata del classico teorema di Hadamard, che corrisponde al caso di $\gamma_1=\gamma_2=\cdots=\gamma_n$.

i due determinanti di Fredholm

$$K\begin{pmatrix} z_1, z_2, \cdots z_n \\ s_1, s_2, \cdots s_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(s_1, z_1) \cdots K(z_1, z_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ K(z_n, s_1) \cdots K(s_n, z_n) \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad K^*\begin{pmatrix} z_1, z_2, \cdots z_n \\ s_1, s_2, \cdots z_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K^*(z_1, s_1) \cdots K^*(z_1, s_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ K^*(z_1, s_1) \cdots K^*(s_n, z_n) \end{vmatrix}$$

si trovano nelle stesse condizioni dei due determinanti Δ e Δ' del lemma, epperò si ha

$$\left| K\begin{pmatrix} z_1, z_2, \cdots z_n \\ s_1, s_2, \cdots z_n \end{pmatrix} - K^*\begin{pmatrix} z_1, z_2, \cdots z_n \\ s_1, s_2, \cdots s_n \end{pmatrix} \right| < n^{\frac{n}{2}}[(N+\varepsilon)^n - N^n] .$$

Ne segue, prendendo i valori assoluti di ambo i membri della (7), che

$$|D(\lambda) - D^*(\lambda)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} n^{\frac{n}{2}} [(N+\varepsilon)^n - N^n] ,$$

od anche

$$|D(\lambda) - D^*(\lambda)| < \Omega[|\lambda|(N+\varepsilon)] - \Omega[|\lambda| N] , \tag{9}$$

avendo indicato con $\Omega(x)$ la funzione intera definita dalla serie

$$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!} x^n . \tag{10}$$

In una Nota successiva istituiremo un calcolo analogo per la funzione $\Delta(x, y|\lambda)$ di Fredholm e ne trarremo le conseguenze relative alla differenza $\varphi - \varphi^*$.

Matematica. — *Estensione della equazione alle derivate funzionali di Hadamard per le funzioni di Green all'elasticità.* Nota della dott. Gina Zanoni, presentata dal Socio Volterra [1].

Nell'*Analyse fonctionnelle* di Paul Lévy, dove troviamo studiate le questioni relative ai funzionali, viene riportata una formula importante di Hadamard sulla funzione di Green:

$$\delta g_B^A = \frac{1}{2\eta} \int_\sigma \frac{dg_M^A}{dn} \frac{dg_B^M}{dn} \delta n \, d\sigma . \tag{1}$$

Con essa si vuol dare un'espressione analitica alla variazione che subisce la g, funzione di Green, col variare del contorno σ del campo S, in cui questa viene considerata. Bisogna, infatti, tener presente che la funzione di Green rientra nella categoria delle funzioni di linea (oltre che essere funzione dei due punti A e B), come risulta dalla sua definizione

$$g_B^A = \log r - h_B^A ,$$

[1] Presentata nella seduta del 30 maggio 1924.