ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

i due determinanti di Fredholm

$$K\begin{pmatrix} z_1, z_2, \cdots z_n \\ z_1, z_2, \cdots z_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(z_1, z_1) \cdots K(z_1, z_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ K(z_n, z_1) \cdots K(z_n, z_n) \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad K^*\begin{pmatrix} z_1, z_2, \cdots z_n \\ z_1, z_2, \cdots z_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K^*(z_1, z_1) \cdots K^*(z_1, z_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ K^*(z_n, z_1) \cdots K^*(z_n, z_n) \end{vmatrix}$$

si trovano nelle stesse condizioni dei due determinanti Δ e Δ' del lemma, epperò si ha

$$\left| K\begin{pmatrix} z_1, z_2, \cdots z_n \\ z_1, z_2, \cdots z_n \end{pmatrix} - K^*\begin{pmatrix} z_1, z_2, \cdots z_n \\ z_1, z_2, \cdots z_n \end{pmatrix} \right| < n^{\frac{n}{2}} [(N + \varepsilon)^n - N^n] .$$

Ne segue, prendendo i valori assoluti di ambo i membri della (7), che

$$|D(\lambda) - D^*(\lambda)| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} n^{\frac{n}{2}} [(N + \varepsilon)^n - N^n] ,$$

od anche

$$|D(\lambda) - D^*(\lambda)| < \Omega[|\lambda|(N + \varepsilon)] - \Omega[|\lambda| N] , \tag{9}$$

avendo indicato con $\Omega(x)$ la funzione intera definita dalla serie

$$\Omega(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!} x^n . \tag{10}$$

In una Nota successiva istituiremo un calcolo analogo per la funzione $\Delta(x, y|\lambda)$ di Fredholm e ne trarremo le conseguenze relative alla differenza $\varphi - \varphi^*$.

Matematica. — *Estensione della equazione alle derivate funzionali di Hadamard per le funzioni di Green all'elasticità.* Nota della dott. GINA ZANONI, presentata dal Socio VOLTERRA [1].

Nell'*Analyse fonctionnelle* di Paul Lévy, dove troviamo studiate le questioni relative ai funzionali, viene riportata una formula importante di Hadamard sulla funzione di Green:

$$\delta g_B^A = \frac{1}{2\eta} \int_\sigma \frac{dg_M^A}{dn} \frac{dg_B^M}{dn} \delta n \, d\sigma . \tag{1}$$

Con essa si vuol dare un'espressione analitica alla variazione che subisce la g, funzione di Green, col variare del contorno σ del campo S, in cui questa viene considerata. Bisogna, infatti, tener presente che la funzione di Green rientra nella categoria delle funzioni di linea (oltre che essere funzione dei due punti A e B), come risulta dalla sua definizione

$$g_B^A = \log r - h_B^A ,$$

[1] Presentata nella seduta del 30 maggio 1924.

h essendo una funzione armonica, regolare in S, avente la particolarità di annullarsi su σ.

La (1) è un caso particolare dell'equazione generale di Hadamard

$$\delta \Phi_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} = \int_\sigma \Phi_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}} \Phi_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}} \delta n \, d\sigma ,$$

valida per funzioni di linea e di due punti, simmetriche rispetto a questi; e ad essa si perviene, partendo dalla formula che risolve il problema di Dirichlet per funzioni armoniche. Nell'opera citata di Paul Lévy e nel *Calcul des variations* di Hadamard troviamo la stessa relazione funzionale per il caso della funzione di Green biarmonica e per quello della funzione dî Green armonica nello spazio a 3 dimensioni. Se si prende in considerazione la formula che risolve il problema di Dirichlet esteso a funzioni m-armoniche, si può anche trovare la variazione della funzione di Green m-armonica nello spazio a 2 e nello spazio a 3 dimensioni.

Veniamo a constatare ora che, anche nello studio dei problemi di elasticità, ci si trova di fronte a funzioni analoghe, per cui possiamo fissare delle equazioni funzionali simili a questa stabilita da Hadamard.

Nella risoluzione del problema, relativo alle espressioni, nell'interno di un campo S, delle componenti di uno spostamento elastico, subìto dalle particelle del corpo stesso sotto l'azione di forze esterne e tensioni superficiali (problema risolto dalle formule di Somigliana), intervengono delle funzioni, dipendenti dalla forma del contorno di S, funzioni di linea, le quali hanno ufficio analogo alla funzione di Green. Vogliamo ricercare delle relazioni funzionali tra la variazione di tali funzioni e la variazione del contorno, da cui dipendono. Per questo scopo prendiamo in considerazione le formule di Somigliana:

per il caso del piano

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} -2k\eta\, u_0 &= \int_{\mathrm{S}} \varrho \Sigma \mathrm{X}\, u_1 \, d\mathrm{S} + \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma u_1 \, d\sigma - \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma^{(1)} u \, d\sigma \\ -2k\eta\, v_0 &= \int_{\mathrm{S}} \varrho \Sigma \mathrm{X}\, u_2 \, d\mathrm{S} + \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma u_2 \, d\sigma - \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma^{(2)} u \, d\sigma ; \end{aligned} \right.$$

per il caso dello spazio

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} -4k\eta\, u_0 &= \int_{\mathrm{S}} \varrho \Sigma \mathrm{X}\, u_1 \, d\mathrm{S} + \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma u_1 \, d\sigma - \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma^{(1)} u \, d\sigma \\ -4k\eta\, v_0 &= \int_{\mathrm{S}} \varrho \Sigma \mathrm{X}\, u_2 \, d\mathrm{S} + \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma u_2 \, d\sigma - \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma^{(2)} u \, d\sigma \\ -4k\eta\, w_0 &= \int_{\mathrm{S}} \varrho \Sigma \mathrm{X}\, u_3 \, d\mathrm{S} + \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma u_3 \, d\sigma - \int_\sigma \Sigma \mathrm{X}_\sigma^{(3)} u \, d\sigma . \end{aligned} \right.$$

Studiamo dapprima la questione nel caso del piano, e facciamo allora due ipotesi:

1ª) $X = Y = 0$;

2ª) al contorno del corpo le componenti dello spostamento assumano valori noti.

Tenendo conto della seconda ipotesi, dobbiamo eliminare dalle (1), nelle quali si sia già posto $X = Y = 0$ per la 1ª), le componenti della tensione superficiale, e per questo basta prendere in considerazione due spostamenti $(a_1 b_1)$, $(a_2 b_2)$, dove $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ sono funzioni regolari in S, corrispondenti a forze di massa nulle. Siano $A_\sigma^{(1)} B_\sigma^{(1)}$, $A_\sigma^{(2)} B_\sigma^{(2)}$ le componenti delle tensioni superficiali rispettive. Applicando il teorema del Betti al primo e al secondo spostamento, insieme con lo spostamento $(u v)$ e sommando con la (1), si ottiene

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} -2k\eta u_0 &= \int_\sigma \left\{ X_\sigma (u_1 + a_1) + Y_\sigma (v_1 + b_1) \right\} d\sigma - \\ &\qquad - \int_\sigma \left\{ (X_\sigma^{(1)} + A_\sigma^{(1)}) u + (Y_\sigma^{(1)} + B_\sigma^{(1)}) v \right\} d\sigma \\ -2k\eta v_0 &= \int_\sigma \left\{ X_\sigma (u_2 + a_2) + Y_\sigma (v_2 + b_2) \right\} d\sigma - \\ &\qquad - \int_\sigma \left\{ (X_\sigma^{(2)} + A_\sigma^{(2)}) u + (Y_\sigma^{(2)} + B_\sigma^{(2)}) v \right\} d\sigma \end{aligned} \right.$$

Consideriamo allora le funzioni

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} U_1 &= u_1 + a_1 & V_1 &= v_1 + b_1 \\ U_2 &= u_2 + a_2 & V_2 &= v_2 + b_2 \end{aligned} \right.$$

dove

$$u_1 = \log r + \frac{\alpha}{4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ r^2 (\log r - 1) \right\}, \; v_1 = \frac{\alpha}{4} \frac{\partial^2}{\partial y \, \partial x} \left\{ r^2 (\log r - 1) \right\}$$

$$u_2 = \frac{\alpha}{4} \frac{\partial^2}{\partial x \, \partial y} \left\{ r^2 (\log r - 1) \right\}, \; v_2 = \log r + \frac{\alpha}{4} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ r^2 (\log r - 1) \right\},$$

con la condizione che si annullino al contorno. Sono, queste, le funzioni di linea precedentemente nominate e che risultano funzioni, oltre che del contorno, anche dei due punti A e B, di cui r è la distanza; potremo, con simbolo generico, rappresentarle così: $W\binom{A}{B}$ ovvero $W(AB)$. Esse presentano singolarità nel polo.

Applichiamo, ora, agli spostamenti elastici (4) le formule (3); dovendo, però, di tali funzioni prendere i valori al contorno, facendo, cioè, tendere il punto A verso un punto M del contorno, bisogna tenere presente che, come facilmente si dimostra, U_1 e V_2 sono funzioni simmetriche rispetto ai due punti, cioè si ha $U_1(AB) = U_1(BA)$ $V_2(AB) = V_2(BA)$, mentre V_1 e U_2 risultano simmetriche tra loro, cioè $V_1(AB) = U_2(BA)$ e $U_2(AB) = = V_1(BA)$. Avremo allora, per la funzione $W\left(\begin{matrix}M\\A\end{matrix}\right)$,

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} -2k\eta\, u_0 &= -\int_\sigma \left\{ U_\sigma^{(1)}\left(\begin{matrix}A\\M\end{matrix}\right) u + U_\sigma^{(2)}\left(\begin{matrix}A\\M\end{matrix}\right) v \right\} d\sigma \\ -2k\eta\, v_0 &= -\int_\sigma \left\{ V_\sigma^{(1)}\left(\begin{matrix}A\\M\end{matrix}\right) u + V_\sigma^{(2)}\left(\begin{matrix}A\\M\end{matrix}\right) v \right\} d\sigma \end{aligned}\right.$$

dove

$$U_\sigma^{(1)} = A_\sigma^{(1)} + X_\sigma^{(1)}\,,\ U_\sigma^{(2)} = A_\sigma^{(2)} + X_\sigma^{(2)}\,,\ V_\sigma^{(1)} = B_\sigma^{(1)} + Y_\sigma^{(1)}\,,\ V_\sigma^{(2)} = B_\sigma^{(2)} + Y_\sigma^{(2)}$$

Cerchiamo ora di valerci di tali formule per la determinazione della variazione propostaci delle 4 funzioni. Immaginiamo di far spostare normalmente a se stesso il contorno σ; in relazione a tale spostamento δn consideriamo le funzioni $\delta U_1 \begin{matrix}A\\B\end{matrix}$, $\delta V_1 \begin{matrix}A\\B\end{matrix}$, $\delta U_2 \begin{matrix}A\\B\end{matrix}$, $\delta V_2 \begin{matrix}A\\B\end{matrix}$, e determiniamone il valore in un punto A interno a σ, supponendo il punto B fisso, pure interno a σ. Poichè in questa ipotesi le funzioni nominate risultano regolari in S, ad esse si potranno applicare le formule (5), che le definiscono mediante i valori al contorno, nell'ipotesi di forze di massa nulle. Valendoci del simbolo generico stabilito, l'espressione del valore al contorno della variazione di W, cioè supponendo A in un punto a di σ, sarà dato da

$$\delta W \begin{matrix}a\\B\end{matrix} = \delta_1 W \begin{matrix}a\\B\end{matrix} - \frac{dW \begin{matrix}a\\B\end{matrix}}{dn}\,\delta n\,,$$

indicando con δ_1 la variazione della W, quando a rimane fisso sul contorno, mentre questo si sposta normalmente a se stesso. Si avrà perciò:

$$\delta W \begin{matrix}a\\B\end{matrix} = -\frac{dW \begin{matrix}a\\B\end{matrix}}{dn}\,\delta n\,.$$

Applicando le (5), avremo le relazioni funzionali cercate:

$$\delta U_1 \begin{matrix}A\\B\end{matrix} = -\frac{1}{2k\eta}\int_\sigma \left(U_\sigma^{(1)}\left(\begin{matrix}A\\M\end{matrix}\right) \frac{dU_1 \begin{matrix}M\\B\end{matrix}}{dn} + U_\sigma^{(2)}\left(\begin{matrix}A\\M\end{matrix}\right) \frac{dV_1 \begin{matrix}M\\B\end{matrix}}{dn} \right) \delta n\, d\sigma$$

$$\delta V_1 \frac{A}{B} = -\frac{1}{2k\eta}\int_\sigma \left(V_\sigma^{(1)}\left(\frac{A}{M}\right) \frac{dU_1 \frac{M}{B}}{dn} + V_\sigma^{(2)}\left(\frac{A}{M}\right) \frac{dV_1 \frac{M}{B}}{dn} \right) \delta n \, d\sigma$$

$$\delta U_2 \frac{A}{B} = -\frac{1}{2k\eta}\int_\sigma \left(U_\sigma^{(1)}\left(\frac{A}{M}\right) \frac{dU_2 \frac{M}{B}}{dn} + U_\sigma^{(2)}\left(\frac{A}{M}\right) \frac{dV_2 \frac{M}{B}}{dn} \right) \delta n \, d\sigma$$

$$\delta V_2 \frac{A}{B} = -\frac{1}{2k\eta}\int_\sigma \left(V_\sigma^{(1)}\left(\frac{A}{M}\right) \frac{dU_2 \frac{M}{B}}{dn} + V_\sigma^{(2)}\left(\frac{A}{M}\right) \frac{dV_2 \frac{M}{B}}{dn} \right) \delta n \, d\sigma .$$

Nel caso dello spazio, dalle formule di Somigliana, con ipotesi analoghe alle 1ª) e 2ª), prendendo in considerazione delle funzioni $U_1 V_1 W_1$, $U_2 V_2 W_2$, $U_3 V_3 W_3$, analoghe a quelle del piano, troviamo le formule:

$$(5') \quad \begin{cases} -4k\eta\, u_0 = -\int_\sigma \left(U_\sigma^{(1)}\left(\frac{A}{M}\right) u + U_\sigma^{(2)}\left(\frac{A}{M}\right) v + U_\sigma^{(3)}\left(\frac{A}{M}\right) w \right) d\sigma \\ -4k\eta\, v_0 = -\int_\sigma \left(V_\sigma^{(1)}\left(\frac{A}{M}\right) u + V_\sigma^{(2)}\left(\frac{A}{M}\right) v + V_\sigma^{(3)}\left(\frac{A}{M}\right) w \right) d\sigma \\ -4k\eta\, w_0 = -\int_\sigma \left(W_\sigma^{(1)}\left(\frac{A}{M}\right) u + W_\sigma^{(2)}\left(\frac{A}{M}\right) v + W_\sigma^{(3)}\left(\frac{A}{M}\right) w \right) d\sigma \end{cases}$$

ricordando che $U_1 V_2 W_3$ sono simmetriche, rispetto ai due punti, di per sè, mentre V_1 lo è con U_2, W_1 con U_3, W_2 con V_3.

Le relazioni funzionali cercate, in questo caso, sono allora:

$$\delta U_1 \frac{A}{B} = -\frac{1}{4k\eta}\int_\sigma \left\{ U_\sigma^{(1)}\left(\frac{A}{M}\right) \frac{dU_1 \frac{M}{B}}{dn} + U_\sigma^{(2)}\left(\frac{A}{M}\right) \frac{dV_1 \frac{M}{B}}{dn} + U_\sigma^{(3)}\left(\frac{A}{M}\right) \frac{dW_1 \frac{M}{B}}{dn} \right\} \delta n \, d\sigma$$

$$\delta V_1 \frac{A}{B} = -\frac{1}{4k\eta}\int_\sigma \left\{ V_\sigma^{(1)}\left(\frac{A}{M}\right) \frac{dU_1 \frac{M}{B}}{dn} + V_\sigma^{(2)}\left(\frac{A}{M}\right) \frac{dV_1 \frac{M}{B}}{dn} + V_\sigma^{(3)}\left(\frac{A}{M}\right) \frac{dW_1 \frac{M}{B}}{dn} \right\} \delta n \, d\sigma$$

$$\delta W_1 \frac{A}{B} = -\frac{1}{4k\eta}\int_\sigma \left\{ W_\sigma^{(1)}\left(\frac{A}{M}\right) \frac{dU_1 \frac{M}{B}}{dn} + W_\sigma^{(2)}\left(\frac{A}{M}\right) \frac{dV_1 \frac{M}{B}}{dn} + W_\sigma^{(3)}\left(\frac{A}{M}\right) \frac{dW_1 \frac{M}{B}}{dn} \right\} \delta n \, d\sigma$$

$$\delta \mathrm{U}_2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = -\frac{1}{4k\eta}\int_\sigma \left\{ \mathrm{U}_\sigma^{(1)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{U}_2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} + \mathrm{U}_\sigma^{(2)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{V}_2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} + \mathrm{U}_\sigma^{(3)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{W}_2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} \right\} \delta n \, d\sigma$$

$$\delta \mathrm{V}_2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = -\frac{1}{4k\eta}\int_\sigma \left\{ \mathrm{V}_\sigma^{(1)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{U}_2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} + \mathrm{V}_\sigma^{(2)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{V}_2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} + \mathrm{V}_\sigma^{(3)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{W}_2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} \right\} \delta n \, d\sigma$$

$$\delta \mathrm{W}_2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = \frac{1}{4k\eta}\int_\sigma \left\{ \mathrm{W}_\sigma^{(1)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{U}_2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} + \mathrm{W}_\sigma^{(2)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{V}_2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} + \mathrm{W}_\sigma^{(3)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{W}_2 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} \right\} \delta n \, d\sigma$$

$$\delta \mathrm{U}_3 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = -\frac{1}{4k\eta}\int_\sigma \left\{ \mathrm{U}_\sigma^{(1)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{U}_3 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} + \mathrm{U}_\sigma^{(2)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{V}_3 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} + \mathrm{U}_\sigma^{(3)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{W}_3 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} \right\} \delta n \, d\sigma$$

$$\delta \mathrm{V}_3 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = -\frac{1}{4k\eta}\int_\sigma \left\{ \mathrm{V}_\sigma^{(1)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{U}_3 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} + \mathrm{V}_\sigma^{(2)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{V}_3 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} + \mathrm{V}_\sigma^{(3)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{W}_3 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} \right\} \delta n \, d\sigma$$

$$\delta \mathrm{W}_3 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = -\frac{1}{4k\eta}\int_\sigma \left\{ \mathrm{W}_\sigma^{(1)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{U}_3 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} + \mathrm{W}_\sigma^{(2)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{V}_3 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} + \mathrm{W}_\sigma^{(3)}\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{M}} \frac{d\mathrm{W}_3 \genfrac{}{}{0pt}{}{\mathrm{M}}{\mathrm{B}}}{dn} \right\} \delta n \, d\sigma$$