ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Matematica finanziaria. — *Intorno alla teoria matematica delle Casse Pensioni.* Nota del prof. LUIGI AMOROSO, presentata dal Socio G. CASTELNUOVO [1].

1. Mi propongo di esporre in questa Nota alcuni risultati, cui sono pervenuto nello studio della teoria matematica delle Casse Pensioni.

Essi portano in generale al calcolo della riserva matematica di tutte le pensioni latenti, *in funzione di due parametri indipendenti*, la età e la anzianità di servizio. E ciò in conseguenza della ipotesi che dipendano appunto da due variabili le funzioni fondamentali N, s, esprimenti: la prima, il numero dei compartecipanti; la seconda, la legge di progressione degli stipendi nel futuro.

Precisamente, detti rispettivamente x, y, t la età, la anzianità di servizio, il tempo, supporremo: che N sia funzione di x e di y, ed esprima il numero dei compartecipanti, che nello istante iniziale hanno età x, anzianità y; che s sia funzione di x e di t, ed esprima lo stipendio che compete al tempo t ad un compartecipante, che ha, nell'istante iniziale, età x.

Questa ipotesi risponde alla realtà assai meglio di quello che si fa ordinariamente, e che consiste nel supporre che i compartecipanti sieno stati iscritti tutti alla stessa età, il che porta alla conseguenza che la differenza $y - x$ sia, per tutti i compartecipanti, la stessa.

L'introduzione della variabile t nella linea di progressione degli stipendii si riflette sulla linea delle pensioni. In generale, detta $\pi(x, y, t)$ la pensione che compete, al tempo t, ad un compartecipante che ha, nello istante iniziale, età x, anzianità y, le norme che regolano la liquidazione delle pensioni determinano in generale $\pi(x, y, t)$ come funzione bilineare di y e di $s(x, t)$, in base ad una formula del tipo

$$\pi(x, y, t) = \{ \lambda + \mu \, s(x, t) \} (y + t + 1),$$

in cui λ, μ sono parametri determinati.

2. Ciò posto, diciamo

$f(x)$ il numero dei compartecipanti, alla età x;
$\theta_1(x)$ la probabilità di esser pensionato " " x;
$\theta_2(x)$ la probabilità di morire " " x;

[1] Presentata nella seduta del 4 maggio 1924.

$a(x)$ il valore della annualità vitalizia „ „ x;

$\theta_3(x)$ la probabilità di lasciar famiglia, con diritto a pensione, ...

$b(x)$ il valore della annualità di famiglia, .

$c(x)$ il valore dell'assicurazione di famiglia, .

$\varrho(x)$ il rapporto fra la pensione alla famiglia e la pensione diretta, ...

x essendo la età del compartecipante o del pensionato alla morte;

i il saggio di interesse;

la età x essendo sempre intera, approssimata, a meno di mezzo anno.

Introduciamo le funzioni fondamentali

$$(1)\quad \begin{cases} G(x) = \dfrac{f(x)}{(1+i)^x} \\[2ex] H(x) = \dfrac{\big(a(x) + \varrho(x)\cdot c(x)\big)\,\theta_1(x) + \varrho(x)\,b(x)\,\theta_2(x)\,\theta_3(x)}{(1+i)^{x+1}} \end{cases}$$

Il valore attuale della pensione latente per un compartecipante, che nello istante iniziale ha età x e anzianità y, si esprime per le funzioni $s(x, t)$, $G(x)$, $H(x)$.

Infatti il valore della pensione latente si compone di tre parti, corrispondenti rispettivamente alla pensione diretta, alla pensione indiretta, alla pensione di riversibilità. Queste sono, ordinatamente,

$$A = \frac{1}{G(x)} \sum_{r=0}^{\omega - x} \pi(x, y, r)\; a(x+r)\; \theta_1(x+r)$$

$$B = \frac{1}{G(x)} \sum_{r=0}^{\omega - x} \pi(x, y, r)\; b(x+r)\; \theta_2(x+r)\; \theta_3(x+r)$$

$$C = \frac{1}{G(x)} \sum_{r=0}^{\omega - x} \pi(x, y, r)\; c(x+r)\; \theta_1(x+r)\,,$$

avendo assunto come unità di tempo l'anno contato verso il futuro, ω essendo la età estrema di sopravvivenza, cioè il massimo valore intero di x, per cui è $f(x) > 0$.

Il valore attuale della pensione latente sarà allora, in complesso,

$$\Phi(x, y) = A + B + C = \frac{1}{G(x)} \sum_{r=0}^{\omega - x} \pi(x, y, r)\; H(x+r)$$

$$= \frac{1}{G(x)} \sum_{r=0}^{\omega - x} \big\{\lambda + \mu\, s(x, r)\big\}\,(y + r + 1)\; H(x+r)\,.$$

La semplicità di questa formula sta nel fatto che essa è lineare rispetto ad y, e quindi il calcolo numerico dei valori di essa si riduce a quello di successive funzioni di una sola variabile.

3. Tale riduzione assume forma particolarmente elegante, ove la funzione $s(x,r)$ sia sviluppabile secondo la formula di Newton

$$s(x,r) = s_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!} s_n(x)\,,$$

in cui è evidente il significato di $s_0(x), s_1(x), \dots, s_n(x), \dots$

Posto invero

$$\Phi_r(x,y) = \frac{1}{G(x)} \sum_{\varrho=r}^{\omega-x} \binom{\varrho}{r} (y+\varrho+1)\, H(x+\varrho)\,,$$

si ha, con semplici calcoli algebrici,

$$\Phi(x,y) = \lambda\, \Phi_0(x,y) + \mu \sum_{r=0}^{\infty} s_r(x)\, \Phi_r(x,y)\,. \tag{2}$$

Il calcolo delle $\Phi_r(x,y)$ si ottiene rapidamente. Introdotte, invero, le funzioni ricorrenti

$$V_0(x) = \sum_{r=0}^{\omega-x} H(x+r)\,,$$

$$\frac{1}{n} V_n(x) = \sum_{r=0}^{\omega-x} V_{n-1}(x+r) \qquad n = 1, 2, \dots$$

per cui è

$$\frac{1}{n!} V_n(x) = \sum_{r=0}^{\omega-x} \binom{n+r}{r} H(x+r) \qquad n = 1, 2, \dots$$

si ha, con calcoli immediati,

$$\Phi_r(x,y) = \frac{y\, V_r(x+r) + V_{r+1}(x+r)}{r!\, G(x)} \qquad r = 1, 2, \dots \tag{3}$$

Poichè ω è la età estrema di sopravvivenza, e quindi le funzioni $f(x)$, $H(x)$, $V_r(x)$ (per ogni valore dell'indice r) si annullano per $x > \omega$, la (3) dimostra che tutte le $\Phi_r(x,y)$, dall'indice $r > \omega$ in poi, sono identicamente nulle. L'espressione, che figura al secondo membro di (2), è quindi solo apparentemente una serie; in realtà è uno sviluppo che contiene sempre un numero finito di termini.

Cade quindi ogni restrizione precedentemente implicita nella sviluppabilità di $s(x, r)$ in serie di Newton.

4. Con formule analoghe ad (1), (2), (3), si esprime il valore attuale degli stipendii futuri e quindi quello della riserva matematica $R(x, y)$. La riserva totale, relativa alla collettività di tutti i compartecipanti, sarà perciò

$$\Sigma\, R(x, y)\, N(x, y),$$

la sommatoria essendo estesa a tutti gli individui della collettività.

5. Un'applicazione di queste formule è contenuta nello studio, da me eseguito, per l'ordinamento delle pensioni al personale del Banco di Napoli.

Idromeccanica. — *Su di una notevole classe di moti fluidi.* Nota di BRUNO FINZI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI [1].

Il prof. Cisotti [2] mise recentemente in rilievo la importanza di una categoria abbastanza generale di moti di masse fluide continue: quella per cui esiste un punto fisso O dello spazio, tale che in ogni punto P la velocità, il vortice, il vettore $\mathbf{r} = P - O$ sono complanari; così che

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0. \tag{1}$$

Accanto a questa considero la relazione

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0, \tag{2}$$

che esprime la condizione di integrabilità dell'equazione vettoriale euleriana dei fluidi perfetti, allorchè il moto è stazionario, e le forze provengano da un potenziale.

Caratterizzo i moti soddisfacenti alla (1) e (2). Risulta allora integrabile l'equazione euleriana; e l'integrale fornisce, per la pressione p, una relazione che, per i moti in discorso, costituisce una estensione di quella di Bernoulli relativa ai moti irrotazionali. Esprimo in fine la soluzione generale del problema, soluzione che dipende dalla composizione di due particolari movimenti, che formano oggetto di trattazione particolare.

1. CARATTERIZZAZIONE. — Affinchè sia soddisfatta la (1), bisognerà che sia

$$\mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{v} = \omega \wedge \mathbf{r}, \tag{3}$$

essendo ω un vettore normale ad $\mathbf{r}$, per cui

$$\omega \times \mathbf{r} = 0. \tag{4}$$

[1] Presentata nella seduta del 30 maggio 1924.

[2] *Sull'energia cinetica di masse fluide continue*: *espressioni varie dell'energia cinetica*. Rend. Acc. Lincei, vol. XXXIII, 1° sem., pag. 60.