ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Cade quindi ogni restrizione precedentemente implicita nella sviluppabilità di $s(x, r)$ in serie di Newton.

4. Con formule analoghe ad (1), (2), (3), si esprime il valore attuale degli stipendii futuri e quindi quello della riserva matematica $R(x, y)$. La riserva totale, relativa alla collettività di tutti i compartecipanti, sarà perciò

$$\Sigma\, R(x, y)\, N(x, y),$$

la sommatoria essendo estesa a tutti gli individui della collettività.

5. Un'applicazione di queste formule è contenuta nello studio, da me eseguito, per l'ordinamento delle pensioni al personale del Banco di Napoli.

Idromeccanica. — *Su di una notevole classe di moti fluidi.* Nota di BRUNO FINZI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI [1].

Il prof. Cisotti [2] mise recentemente in rilievo la importanza di una categoria abbastanza generale di moti di masse fluide continue: quella per cui esiste un punto fisso O dello spazio, tale che in ogni punto P la velocità, il vortice, il vettore $\mathbf{r} = P - O$ sono complanari; così che

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0 . \tag{1}$$

Accanto a questa considero la relazione

$$\operatorname{rot} (\mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{v}) = 0 , \tag{2}$$

che esprime la condizione di integrabilità dell'equazione vettoriale euleriana dei fluidi perfetti, allorchè il moto è stazionario, e le forze provengano da un potenziale.

Caratterizzo i moti soddisfacenti alla (1) e (2). Risulta allora integrabile l'equazione euleriana; e l'integrale fornisce, per la pressione p, una relazione che, per i moti in discorso, costituisce una estensione di quella di Bernoulli relativa ai moti irrotazionali. Esprimo in fine la soluzione generale del problema, soluzione che dipende dalla composizione di due particolari movimenti, che formano oggetto di trattazione particolare.

1. CARATTERIZZAZIONE. — Affinchè sia soddisfatta la (1), bisognerà che sia

$$\mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{v} = \omega \wedge \mathbf{r} , \tag{3}$$

essendo ω un vettore normale ad $\mathbf{r}$, per cui

$$\omega \times \mathbf{r} = 0. \tag{4}$$

[1] Presentata nella seduta del 30 maggio 1924.

[2] *Sull'energia cinetica di masse fluide continue*: *espressioni varie dell'energia cinetica*. Rend. Acc. Lincei, vol. XXXIII, 1° sem., pag. 60.

Se $\omega = 0$, la (2) è identicamente soddisfatta, e i moti appartengono alla nota categoria dei moti irrotazionali, oppure a quella, più ampia, dei moti elicoidali del Beltrami [1]. Potrò quindi limitarmi a caratterizzare i moti nella ipotesi $\omega \neq 0$, determinando ω mediante la (2) e la (3). Queste ultime esigono che sia $\operatorname{rot}(\omega \wedge \mathbf{r}) = 0$. Ma è [2]

$$\operatorname{rot}(\omega \wedge \mathbf{r}) = \left(\operatorname{div}\mathbf{r} - \frac{d\mathbf{r}}{d\mathrm{P}}\right)\omega - \left(\operatorname{div}\omega - \frac{d\omega}{d\mathrm{P}}\right)\mathbf{r},$$

o anche, ricordando la (4) [3]

$$2\omega = (\operatorname{div}\omega)\,\mathbf{r} - \left(\mathrm{K}\frac{d\omega}{d\mathrm{P}} + (\operatorname{rot}\omega)\wedge\right)\mathbf{r},$$

$$\omega = (\operatorname{div}\omega)\,\mathbf{r} - (\operatorname{rot}\omega)\wedge\mathbf{r}.$$

Questa, moltiplicata scalarmente per $\mathbf{r}$, per la (4), diviene

$$\operatorname{div}\omega = 0, \tag{5}$$

e quindi è

$$\omega = \mathbf{r} \wedge \operatorname{rot}\omega. \tag{6}$$

In particolare, dalla (6) si deduce

$$\omega \times \operatorname{rot}\omega = 0. \tag{7}$$

Esisteranno allora due numeri l, m, tali che [4]

$$\omega = l \operatorname{grad} m. \tag{8}$$

Per la (4), è

$$\mathbf{r} \times \operatorname{grad} m = 0, \tag{9}$$

dalla quale si deduce che m è indipendente da r, cioè funzione soltanto, in coordinate geografiche, dell'azimut φ e dello zenit ϑ. Sostituendo la (8) nella (6), ricordando la (9), avremo

$$\mathbf{r} \times \operatorname{grad} l = -l.$$

Questa esige che sia $l = n/r$, dove n è funzione di φ e ϑ soltanto. La (5), per la (8), diviene

$$\operatorname{grad} n/r \times \operatorname{grad} m + n/r \operatorname{div}\operatorname{grad} m = 0;$$

da cui

$$n = q\, e^{-\int \frac{\Delta m}{|\operatorname{grad} m|} ds}, \tag{10}$$

[1] *Considerazioni idrodinamiche*. Rend. Ist. lombardo, vol. XXII, pp. 121-130.
[2] Burali-Forti e Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, I, pag. 81.
[3] Burali-Forti e Marcolongo, loc. cit., pp. 73 e 81.
[4] Burali-Forti e Marcolongo, loc. cit., pag. 122.

dove s è l'arco di linea la cui tangente è diretta come grad m, e q è indipendente da r e da s. La (8) e la (10) definiscono esplicitamente $\boldsymbol{\omega}$.

2. Pressione. — La equazione euleriana dei fluidi perfetti nel caso stazionario e di forze provenienti da un potenziale U, è

$$\mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{grad} p - \operatorname{grad} \mathrm{U} + \tfrac{1}{2} \operatorname{grad} \mathbf{v}^2 ,$$

dove la densità è stata posta uguale a uno. Moltiplichiamo la precedente scalarmente per $d\mathrm{P}$, e integriamo ricordando la (3):

$$p - p_0 = \mathrm{U} - \mathrm{U}_0 - \tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2) + \int_{\mathrm{P_0 P}} \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \times d\mathrm{P} , \tag{11}$$

dove $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \times d\mathrm{P}$ è, per la (2), un differenziale esatto. Ricordando la (8) e la (9), scriveremo la (11) così:

$$p - p_0 = \mathrm{U} - \mathrm{U}_0 - \tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2) + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{n\,(\operatorname{grad} m)^2}{r \operatorname{sen} \varphi \dfrac{\partial m}{\partial \vartheta}}\, d\varphi . \tag{11'}$$

La (11') ci definisce in modo esplicito p, e ci assicura come non sussista la formula di Bernoulli che lungo le superfici ove è $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} \times d\mathrm{P} = 0$, per le quali, manifestamente, la tangente è complanare con $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{r}$. Tali superfici sono dunque coni aventi il vertice in O e direttrici le linee s, le cui tangenti sono dirette come il vettore $\boldsymbol{\omega}$.

3. Velocità. — Noto ω, $\mathbf{v}$ sarà definito dalla (3): questa ci assicura che i 4 vettori $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, \mathbf{v}, \operatorname{rot} \mathbf{v}$ sono complanari, e ci fa certi quindi della esistenza di 4 numeri a, b, c, d, tali che

$$\mathbf{v} = a\boldsymbol{\omega} + b\mathbf{r} \quad , \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = c\boldsymbol{\omega} + d\mathbf{r} \text{ [1]}, \tag{12}$$

con la condizione

$$ad - bc = 1 . \tag{13}$$

Prendendo il rot della prima delle (12), ed eliminando rot $\mathbf{v}$, avremo:

$$c\boldsymbol{\omega} + d\mathbf{r} = \operatorname{grad} a \wedge \boldsymbol{\omega} + a \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + \operatorname{grad} b \wedge \mathbf{r} . \tag{14}$$

Questa, moltiplicata scalarmente per i tre vettori ortogonali $\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$,

[1] La prima delle (12) ci assicura come i coni, di cui si è detto al numero 2, siano superfici di flusso.

dà luogo, se si tien conto della (6) e della (7), alle

$$(14')\quad \begin{cases} c\,\omega^2 = \operatorname{grad} b \wedge \mathbf{r} \times \omega \\ d\,r^2 = \operatorname{grad} a \wedge \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + a \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ 0 = -\operatorname{grad} a \times r\,\omega^2 + a\,\omega^2 - \operatorname{grad} b \times \omega\,\mathbf{r}^2 . \end{cases}$$

Ricaviamo b dalla terza delle (14′): avremo

$$(15)\qquad \mathbf{v} = a\,\boldsymbol{\omega} + \frac{\mathbf{r}}{r^3}\int n\,|\operatorname{grad} m|\,(a - \operatorname{grad} a \times \mathbf{r})\,ds .$$

Questa esprime esplicitamente $\mathbf{v}$, noto a, ed è della forma

$$(15')\qquad \mathbf{v} = h \operatorname{grad} m + k\,\mathbf{r} ,$$

dove h e k sono numeri, funzioni perfettamente note di P, m, a.

La prima delle (14′), considerata accanto alla seconda e alle (13) (15), dà

$$(16)\qquad \omega^2\left(\frac{\operatorname{rot} a\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}{r^2}\,a - 1\right) = \\ = \tfrac{1}{2}\operatorname{grad}\left(\int n\,|\operatorname{grad} m|\,(a - \operatorname{grad} a \times \mathbf{r})\,ds\right)^2 \times \mathbf{r} \wedge \boldsymbol{\omega} .$$

Ad ogni soluzione della (16) corrisponderà una particolare classe di moti soddisfacenti alle (1) e (2).

4. Fluidi incompressibili. — Se il fluido di cui è argomento è incompressibile, alle (1) e (2) va aggiunta la condizione $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Ricordando la (5), questa si muta nella

$$(17)\qquad \operatorname{grad} a \times \boldsymbol{\omega} + 3b + \operatorname{grad} b \times \mathbf{r} = 0 .$$

Se accanto alla (17) consideriamo la (15) e la (16), potremo ricavare m, e caratterizzare così una categoria di moti più ristretta di quella considerata precedentemente.

5. Casi particolari. — La prima delle (12) ci assicura come il moto più generale in istudio risulti dalla somma di due moti: uno diretto come ω, e uno come $\mathbf{r}$. Trattiamo questi due casi limiti.

Sia $b = 0$. La prima delle (14′) ci assicura essere $c = 0$, e quindi

$$(18)\qquad \operatorname{rot} \mathbf{v} = d\,\mathbf{r} .$$

Allora il moto avviene per superfici parallele (sfere concentriche), e le linee vorticose sono traiettorie ortogonali di queste [1]. Si vede facilmente come

[1] Questi moti, astrazion fatta dalla (2), nella ipotesi $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ furono trattati da B. Segre (*Sul moto sferico vorticoso di un fluido incompressibile*, Annali di matematica, serie IV, tomo I, fasc. 1°, pp. 31-55), e, tenendo conto della (2), da B. Finzi (*Moti di fluidi incompressibili il cui vertice è normale alla velocità*, Rend. Acc. dei Lincei, vol. XXXIII, pag. 275). In quest'ultimo caso i risultati sono gli stessi di quelli che ora ritroveremo più generalmente.

questo moto, per r finito, non sia possibile che per $\omega = 0$. L'asserto scende immediatamente dalla sostituzione della (13) nella terza delle (14'): quest'ultima, per $\omega \neq 0$, diviene: $\text{grad}\, d \times \mathbf{r} + d = 0$. Ma, prendendo la div di entrambi i membri della (18), si ha: $\text{grad}\, d \times \mathbf{r} + 3d = 0$. Queste due ultime relazioni non ammettono soluzioni comuni che per $d = 0$ (moto irrotazionale), oppure per i casi esclusi $r = \infty$ (moto piano), $\omega = 0$ (ancora moto irrotazionale, data l'ortogonalità di $\mathbf{v}$ e $\text{rot}\,\mathbf{v}$).

Sia $a = 0$. La terza della (14') e la (13) sono ben compatibili con la

$$\text{rot}\,\mathbf{v} = c\,\omega. \tag{19}$$

La prima e l'ultima delle (14') definiranno

$$b^2 = -\int \frac{2\omega}{r}\, du + f(r). \tag{20}$$

Nella (20) f è la costante di integrazione, e u la linea la cui tangente è diretta come $\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r}$. Si noti come la (20) potesse ottenersi direttamente dalla (16).

Questi moti radiali si possono immaginare prodotti da una sorgente puntiforme, dallo scoppio di un proiettile in un fluido, ecc. Nella ipotesi che il mezzo in seno al quale avviene il moto sia incompressibile, è facile dimostrare come, per r finito, il moto debba essere irrotazionale.

Infatti: dalla (14), tenendo conto della (13), si ha

$$\omega = -\tfrac{1}{2}\,\text{grad}\, b^2 \wedge \mathbf{r}\,; \tag{21}$$

e moltiplicando vettorialmente per $\mathbf{r}$, essendo r finito

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{r} = \tfrac{1}{2}\,\text{grad}\, b^2 \cdot r^2 - \mathbf{r} \cdot \tfrac{1}{2}\,\text{grad}\, b^2 \times \mathbf{r}.$$

Prendendo il rot di entrambi i membri, e ricordando la (2), la (3), la (17):

$$3\,\text{grad}\, b^2 \wedge \mathbf{r} + \text{grad}\, r^2 \wedge \tfrac{1}{2}\,\text{grad}\, b^2 = 0\,,$$

da cui $\text{grad}\, b^2 \wedge \mathbf{r} = 0$. Questa, per la (21), esige che sia $\omega = 0$. Quest'ultima relazione, data l'ortogonalità di $\mathbf{v}$ e $\text{rot}\,\mathbf{v}$, sarà soddisfatta soltanto per moti irrotazionali: c. v. d.