ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

***

Durante le esperienze avemmo occasione di fare anche le seguenti osservazioni: nel vivaio consorziale di Empoli, dove la fillossera gallecola comparve tre anni fa sul 1202, nonostante la cura Balbiani, fatta lo scorso anno e quest'anno, vi sono galle sul 3309 e sul 101.14; mancano su tutti gli altri vitigni coltivati, compreso il 1202.

In agosto l'infezione si notava sul 3309 e sul 101.14 e meno abbondante sul 106.8; completamente immuni erano i vitigni Aramon $\times$ Rupestris n. 1, 1202, Rupestris du Lot e 420 A. Ma l'infezione era pienamente estinta. Data la natura del terreno eccessivamente argilloso e tenacissimo e l'aridità della stagione, la vegetazione doveva aver subìto un considerevole arresto, tanto che tutte le gallecole erano morte. Le galle vecchie erano piene di gusci d'uova e di madri morte; le foglioline apicali, anche delle piante che erano state molto infette, non presentavano nè galle nè gallecole; dove avevano tentato fissarsi delle neonate, le galle non si erano prodotte e le fillosserine erano morte sul posto. In tutto il vivaio non fu possibile raccogliere alcuna galla fresca, con madri ovificanti ed uova.

Nel vivaio consorziale di S. Miniato le galle sono comparse da diversi anni: quest'anno sono, in ordine decrescente, su 3309, 101.14, 106.8, 3306, Riparia Gloire, 157.11. In questo vivaio non si è verificato il fenomeno costatato ad Empoli: ma l'infezione è continuata nell'estate e nell'autunno, sebbene con intensità un po' limitata. Quel che è da segnalare è la localizzazione delle galle, notevole anche ad Empoli, ma qui più evidente. Cioè vi sono gruppi di piante, a macchia, per esempio, nell'appezzamento del 3309, molto infette di galle, mentre tutte le altre piante all'intorno si presentano scarsamente infette o del tutto immuni. Insomma l'infezione, invece di essere diffusa per tutto l'appezzamento del 3309, si manifesta a chiazze, a macchie, qua e là, come avviene dei deperimenti fillosserici nelle vigne nostrali: si ha quindi l'impressione che la recettività per l'infezione dipenda più dalla ubicazione e dallo stato di vegetazione del vitigno, che dalla qualità del vitigno stesso.

Matematica. — *Sulle funzioni trascendenti sèmplici.* Nota del Socio S. Pincherle.

1. Nel piano della variabile complessa x, si indichi con $\boldsymbol{t}$ il tratto dell'asse reale compreso fra 1 e $+\infty$, e si indichi con t la variabile reale, positiva, maggiore d'uno. Sia data su $\boldsymbol{t}$ una funzione $\sigma(t)$ reale o complessa, limitata ed integrabile su ogni intervallo finito di $\boldsymbol{t}$, e sia inoltre convergente l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{t}. \tag{1}$$

Vale allora il teorema:

« Per ogni valore di x non appartenente a $\boldsymbol{t}$, l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{t-x} \tag{2}$$

« è convergente ».

Infatti, l'integrale

$$\tau(u) = \int_1^u \frac{\sigma(t)\,dt}{t}$$

dà una funzione di u continua su tutto $\boldsymbol{t}$, la quale, per l'ipotesi della convergenza di (1), sarà limitata su $\boldsymbol{t}$ e vi avrà un massimo valore assoluto a. Si consideri ora, con $1 < m < m'$, l'integrale

$$j(m, m') = \int_m^{m'} \frac{\sigma(t)\, dt}{t - x},$$

x non appartenente a $\boldsymbol{t}$. Integrando per parti, si avrà

$$j(m, m') = \frac{\tau(m')}{m' - x} - \frac{\tau(m)}{m - x} + \int_m^{m'} \frac{\tau(t)\, dt}{(t - x)^2}. \tag{3}$$

Poichè x non appartiene a $\boldsymbol{t}$, $1 - \frac{x}{t}$ ha, su tutto $\boldsymbol{t}$, un minimo valore assoluto non nullo: sia esso δ; perciò i due primi termini del secondo membro di (3) dànno un valore assoluto inferiore a $\frac{2a}{m\delta}$; l'ultimo termine del detto secondo membro, essendo minore in valore assoluto di

$$a \int_m^{m'} \frac{dt}{|t - x|^2},$$

è pure inferiore in modulo a $\frac{2a}{m\delta}$. Basta dunque, scelto un ε positivo arbitrario, prendere $m > \frac{4a}{\varepsilon\delta}$ per rendere $|j(m, m')| < \varepsilon$; con ciò la convergenza di (2) è dimostrata.

2. La medesima dimostrazione vale a provare che

« Preso nel piano x un campo C, di cui i punti interni e al con-
« torno abbiano da $\boldsymbol{t}$ distanze superiori ad un numero positivo assegnabile,
« per tutti i punti di questo campo l'integrale

$$f(x, u) = \int_1^u \frac{\sigma(t)\, dt}{t - x} \tag{4}$$

« tende, per $u \to +\infty$, uniformemente ad

$$f(x) = \int_1^\infty \frac{\sigma(t)\, dt}{t - x} \text{ ».} \tag{2'}$$

Ma le funzioni (4) sono notoriamente analitiche regolari in tutto il piano x, ad eccezione di un taglio fatto lungo l'asse reale fra 1 ed u; perciò, applicando un noto teorema di La Vallée Poussin [1], ed in seguito alla dimostrata convergenza uniforme, si ha che

« La $f(x)$ è funzione (o ramo di funzione) analitica, regolare in tutto
« il piano x ad eccezione del taglio $\boldsymbol{t}$ ».

[1] Generalizzazione di un teorema fondamentale di Weierstrass, data nella Nota *Sur les applications de la notion de convergence uniforme dans la théorie des fonctions d'une variable complexe,* Ann. de la Société scientifique de Bruxelles, T. 17_2, 1893.

Di più, e per lo stesso teorema di La Vallée Poussin, per le derivate di $f(x)$ valgono le espressioni, valide nello stesso campo:

$$f^{(n)}(x) = n!\int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{(t-x)^{n+1}}. \tag{5}$$

3. Le funzioni $f(x)$ definite da (2′), sono trascendenti analitiche aventi uno speciale carattere di semplicità. Tolto il raggio t, esse sono dovunque regolari, e per la generalità delle $\sigma(t)$, funzione arbitraria di variabile reale, esse non saranno in generale continuabili attraverso t, che verrà a costituire per esse una linea singolare o, se si vuole, un taglio *essenziale*. Ma se la $\sigma(t)$ è funzione analitica, regolare in tutto od in parte nei punti di t (caso che è stato ripetutamente considerato) allora il taglio non è più essenziale: esso diviene un taglio hermitiano (*künstlich*) che può essere variato come linea d'integrazione lasciandone invariati gli estremi, e la (2′), anzichè definire una funzione analitica uniforme a linea singolare essenziale, dà un ramo ad un valore di una funzione analitica, prolungabile attraverso t e generalmente multiforme

Alle funzioni uniformi, o ai rami di funzioni multiformi, rappresentati da (2), daremo il nome di *trascendenti semplici.*

4. La $f(x)$ ammette entro il cerchio di centro $x=0$ e di raggio 1 uno sviluppo in serie di potenze

$$f(x) = \sum c_n x^n, \tag{6}$$

i cui coefficienti sono dati, in forza delle (5), da

$$c_n = \int_1^\infty t^{-n-1}\,\sigma(t)\,dt.$$

Ora, questi coefficienti non sono che i valori, per $z = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$, della funzione

$$\mathrm{F}(z) = \int_1^\infty t^{-z-1}\,\sigma(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-zt}\,\sigma(e^t)\,dt, \tag{7}$$

la quale è una funzione determinante di cui $\sigma(e^t)$ è la generatrice: essa è analitica in z e, dalla convergenza della (1), risulta notoriamente che essa converge per ogni z la cui parte reale è positiva. Pertanto:

« Lo sviluppo in serie di potenze di x di una trascendente semplice « ha per coefficienti i valori, per $z = 0, 1, 2, \ldots$, di una funzione deter- « minante, regolare per $\mathfrak{R}(z) > 0$, di cui $\sigma(e^t)$ è la generatrice ».

Reciprocamente, abbiasi una serie di potenze $\sum c_n x^n$ il cui coefficiente generico c_n sia il valore, per $z = n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, di una funzione determinante regolare per $\mathfrak{R}(z) \geq 0$:

$$\mathrm{F}(z) = \int_1^\infty t^{-z-1}\,\varphi(t)\,dt:$$

l'integrale

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(t)\,dt}{t}$$

viene dunque ad essere convergente e perciò, per i precedenti n.[i] 1 e 4, « la serie (6) è lo sviluppo, per $|x| < 1$, di una funzione semplice » (¹).

Si noti che, per la proprietà ricordata delle funzioni determinanti, dalla convergenza di (1) consegue quella di

$$\int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{t^\alpha}$$

per ogni α la cui parte reale sia maggiore d'uno.

5. Alle ipotesi fatte al n. 1 sulla funzione $\sigma(t)$ si aggiunga ora quella della continuità su tutto t. Si può allora dimostrare che

« Se la variabile x attraversa normalmente il taglio t nel punto $t = u$, la $f(x)$ subisce una discontinuità data da $2\pi i\,\sigma(u)$ »; o, in altri termini, si ha:

$$\lim_{v \to 0} \Big(f(u + iv) - f(u - iv) \Big) = 2\pi i\, \sigma(u)\,. \tag{8}$$

A dimostrare ciò, si può scrivere anzitutto

$$f(u + iv) - f(u - iv) = 2iv \int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{(t-u)^2 + v^2}\,; \tag{9}$$

ora, $\sigma(t)$ essendo continua, si può, preso un numero positivo arbitrario ε, determinare un numero positivo δ tale che per

$$u - \delta < t < u + \delta$$

risulti

$$\sigma(t) = \sigma(u) + \varepsilon(t)\,, \qquad |\varepsilon(t)| < \varepsilon. \tag{10}$$

L'integrale del secondo membro della (9) si spezzi in

$$\int_1^{u-\delta} + \int_{u-\delta}^{u+\delta} + \int_{u+\delta}^\infty\,;$$

di questi, il primo, integrato per parti, dà

$$\left(\frac{\tau(t)}{(t-u)^2 + v^2} \right)_1^{u-\delta} + 2 \int_1^{u-\delta} \frac{\tau(t)\,(t-u)\,dt}{((t-u)^2 + v^2)^2}\,,$$

(¹) Un caso particolare di questo teorema è stato dato da tempo, ora per la parte diretta, ora per la reciproca, da Hadamard, Leau, Le Roy, Faber: si tratta del caso in cui i coefficienti c_n della serie sono i valori, per $n = m, m+1, ..$ di una funzione $F(z)$ analitica regolare per $z = \infty$. È noto infatti che le funzioni regolari per $z = \infty$ rientrano come caso particolare nella classe delle funzioni determinanti. In questo caso però, la $\sigma(t)$ è essenzialmente analitica (anzi intera) e quindi la funzione semplice ha in t un taglio non essenziale.

e questo è in modulo inferiore ad $\frac{a}{\delta^2} + \frac{2a}{\delta^3}$, essendo a (n. 1) il massimo valore assoluto di $\varepsilon(t)$. Analogo risultato per il terzo; si può dunque prendere v positivo abbastanza piccolo perchè il prodotto

$$2iv\left(\int_1^{u+\delta} + \int_{u+\delta}^{\infty}\right)$$

risulti inferiore ad ε in valore assoluto. In quanto al secondo integrale, esso dà, per la (10):

$$2iv\int_{u-\delta}^{u+\delta} = 2iv\,\sigma(u)\int_{u-\delta}^{u+\delta}\frac{dt}{(t-u)^2+v^2} + 2iv\int_{u-\delta}^{u+\delta}\frac{\varepsilon(t)\,dt}{(t-u)^2+v^2},$$

e qui, prendendo $\frac{t-u}{v}$ come variabile d'integrazione, il secondo termine nel secondo membro risulta subito inferiore a $2\varepsilon\pi$ in valore assoluto, mentre il primo si scrive

$$2i\,\sigma(u)\,(\operatorname{arc\,tg} t)_{-\delta/v}^{\delta/v},$$

e qui si può prendere v abbastanza piccolo perchè esso differisca in valore assoluto da $2\pi i\,\sigma(u)$ per meno di ε. La (8) risulta con ciò dimostrata.

6. Nel caso, assai più restrittivo, e che è quasi esclusivamente quello considerato fin qui, in cui la $\sigma(t)$ si suppone funzione analitica regolare nei punti della linea t esclusi gli estremi, il teorema precedente rientra in una antica proposizione di Hermite ([1]); in questo caso, il taglio t non è essenziale, e se si parte da un punto x esterno a t ma appartenente al campo di regolarità di $\sigma(x)$, e si ritorna in x descrivendo una curva chiusa che attraversi t, partendo col valore $f(x)$, si ritorna col valore $f(x) + 2\pi i\,\sigma(x)$. L'integrale (2) dà un ramo di una funzione multiforme, per la quale t è un taglio riemanniano; al ritorno, x va considerato in un foglio della riemanniana consecutivo a quello cui apparteneva il punto di partenza.

Il caso qui considerato, in cui si fa « per la $\sigma(t)$ la sola ipotesi della scontinuità », potrebbe agevolmente estendersi a casi più generali, nei quali si ammetterebbero per $\sigma(t)$ alcune forme di discontinuità. Così, se per $t = u$ la $\sigma(t)$ ammette una discontinuità di prima specie, cioè esistono $\sigma(u-0)$ e $\sigma(u+0)$, si vede facilmente che il salto è dato, all'infuori del fattore $2\pi i$, da $\frac{1}{2}(\sigma(u+0)+\sigma(u-0))$.

7. Se $f_m(x)$ è la funzione semplice ottenuta da $\frac{\sigma(t)}{t^m}$, $(m = 1, 2, 3, \ldots)$, fra questa e la $f(x)$ passa la relazione

$$x^m f_m(x) = f(x) - c_0 - c_1 x - \cdots - c_{m-1} x^{m-1}.$$

([1]) *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, J. di Crelle, T. 94, 1884, e *Cours d'Analyse* (lith.), Paris, 1891, p. 155.

Se ora la (1) non fosse convergente, ma lo fosse

$$\int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{t^\alpha},$$

dove la parte reale di α è >1, la (2) non avrebbe più senso, mentre lo ha la $f_m(x)$ per ogni intero m non inferiore alla parte reale di α. Si può, in tal caso, sostituire alla $f(x)$ la espressione

$$x^m f_m(x) + p(x),$$

essendo $p(x)$ un polinomio razionale intero in x, di grado $m-1$ al più, arbitrario; in questa espressione si conservano le proprietà della $f(x)$.

Meccanica. — *Sull'energia cinetica di masse fluide continue: espressioni varie dell'energia cinetica.* Nota del Corrisp. UMBERTO CISOTTI.

4. *Valutazione di* $\frac{dV}{dt}$ (¹). — Dalla prima delle (8), derivando rispetto a t, si ottiene

$$\frac{dV}{dt} = \int_S \mu \frac{d(\mathbf{r}\times\mathbf{v})}{dt}\,dS. \tag{14}$$

Considerando il moto del fluido dal punto di vista euleriano, μ e $\mathbf{v}$ sono funzioni di t e di P, per cui

$$\frac{d(\mathbf{r}\times\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{r}\times\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\times\operatorname{grad}(\mathbf{r}\times\mathbf{v});$$

da questa, moltiplicando i due membri per μ e aggiungendo e togliendo nel secondo membro lo scalare $\mathbf{r}\times\mathbf{v}\,\frac{\partial\mu}{\partial t}$, si ricava

$$\mu\frac{d(\mathbf{r}\times\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{r}\times\frac{\partial(\mu\mathbf{v})}{\partial t} - \mathbf{r}\times\mathbf{v}\,\frac{\partial\mu}{\partial t} + \mu\mathbf{v}\times\operatorname{grad}(\mathbf{r}\times\mathbf{v});$$

ma, per l'equazione di continuità,

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} = -\operatorname{div}(\mu\mathbf{v}),$$

per cui

$$\mu\frac{d(\mathbf{r}\times\mathbf{v})}{dt} = \mathbf{r}\times\frac{\partial(\mu\mathbf{v})}{\partial t} + (\mathbf{r}\times\mathbf{v})\operatorname{div}(\mu\mathbf{v}) + \mu\mathbf{v}\times\operatorname{grad}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}),$$

(¹) Vedi questi Rendiconti, vol. XXXII, 2° sem., pag. 464.