ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Se ora la (1) non fosse convergente, ma lo fosse

$$\int_1^\infty \frac{\sigma(t)\,dt}{t^\alpha},$$

dove la parte reale di α è > 1, la (2) non avrebbe più senso, mentre lo ha la $f_m(x)$ per ogni intero m non inferiore alla parte reale di α. Si può, in tal caso, sostituire alla $f(x)$ la espressione

$$x^m f_m(x) + p(x),$$

essendo $p(x)$ un polinomio razionale intero in x, di grado $m-1$ al più, arbitrario; in questa espressione si conservano le proprietà della $f(x)$.

Meccanica. — *Sull'energia cinetica di masse fluide continue: espressioni varie dell'energia cinetica.* Nota del Corrisp. UMBERTO CISOTTI.

4. *Valutazione di* $\frac{dV}{dt}$ (¹). — Dalla prima delle (8), derivando rispetto a t, si ottiene

$$\frac{dV}{dt} = \int_S \mu \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{v})}{dt} dS. \tag{14}$$

Considerando il moto del fluido dal punto di vista euleriano, μ e $\mathbf{v}$ sono funzioni di t e di P, per cui

$$\frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{v})}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \operatorname{grad}(\mathbf{r} \times \mathbf{v});$$

da questa, moltiplicando i due membri per μ e aggiungendo e togliendo nel secondo membro lo scalare $\mathbf{r} \times \mathbf{v} \frac{\partial \mu}{\partial t}$, si ricava

$$\mu \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{v})}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{\partial(\mu \mathbf{v})}{\partial t} - \mathbf{r} \times \mathbf{v} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \mathbf{v} \times \operatorname{grad}(\mathbf{r} \times \mathbf{v});$$

ma, per l'equazione di continuità,

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\operatorname{div}(\mu \mathbf{v}),$$

per cui

$$\mu \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{v})}{dt} = \mathbf{r} \times \frac{\partial(\mu \mathbf{v})}{\partial t} + (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \operatorname{div}(\mu \mathbf{v}) + \mu \mathbf{v} \times \operatorname{grad}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}),$$

(¹) Vedi questi Rendiconti, vol. XXXII, 2° sem., pag. 464.

e infine, per essere la somma dei due ultimi termini $\mathrm{div}\,[\mu(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\,\mathbf{v}]$,

$$\mu\,\frac{d(\mathbf{r}\times\mathbf{v})}{dt}=\mathbf{r}\times\frac{\partial(\mu\mathbf{v})}{\partial t}+\mathrm{div}\,[\mu(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\,\mathbf{v}]\,.$$

Per questa, la (14) può scriversi

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt}=\int_{\mathrm{S}}\mathbf{r}\times\frac{\partial(\mu\mathbf{v})}{\partial t}\,d\mathrm{S}+\int_{\mathrm{S}}\mathrm{div}\,[\mu(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\,\mathbf{v}]\,d\mathrm{S}\,;$$

ora quest'ultimo integrale, potendosi esprimere anche nel modo seguente:

$$-\int_\sigma\mu(\mathbf{r}\times\mathbf{v})\,(\mathbf{v}\times\mathbf{n})\,d\sigma\,,$$

è nullo per essere

$$\mathbf{v}\times\mathbf{n}=0\,, \tag{15}$$

in ogni punto di σ [1], per cui, in definitiva, si ha

$$\frac{d\mathrm{V}}{dt}=\int_{\mathrm{S}}\mathbf{r}\times\frac{\partial(\mu\mathbf{v})}{\partial t}\,d\mathrm{S}\,. \tag{16}$$

5. *Prima espressione dell'energia cinetica.* — Dalla (7) si ricava

$$2\mathrm{T}=\frac{d\mathrm{V}}{dt}-\mathrm{W}\,, \tag{17}$$

e, per la (13) e la (16),

$$2\mathrm{T}=\int_{\mathrm{S}}\left\{\mathbf{r}\times\left[\frac{\partial(\mu\mathbf{v})}{\partial t}-\mu\mathbf{F}\right]-\mathrm{I}_1\beta\right\}d\mathrm{S}-\int_\sigma\mathbf{r}\times\mathbf{F}_n\,d\sigma\,, \tag{18}$$

che fornisce una espressione notevole dell'energia cinetica della massa fluida.

6. *Altre espressioni dell'energia cinetica.* — Riferendoci alla terza delle (8), si noti che

$$\mathbf{F}+\mathbf{f}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,,$$

ed essendo $\mathbf{v}$ funzione di t e di P, per cui

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})\wedge\mathbf{v}+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,\mathbf{v}^2\,,$$

si ha

$$\mathbf{F}+\mathbf{f}=\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathrm{rot}\,\mathbf{v})\wedge\mathbf{v}+\tfrac{1}{2}\,\mathrm{grad}\,\mathbf{v}^2\,.$$

[1] Si rilevi che S è lo spazio fisso entro cui avviene il moto della massa fluida continua, quindi: o il moto non si estende fino alla superficie (o alle superficie) σ limitante S, oppure su questa vi è *aderenza* completa e allora, in entrambi i casi, è addirittura $\mathbf{v}=0$ sopra σ, altrimenti σ è superficie di flusso; in ogni caso adunque è soddisfatta la (15).

Per questa la terza delle (8) può scriversi

$$\text{(19)} \qquad \mathrm{W} = \int_S \mu \mathbf{r} \times \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathrm{rot}\, \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} + \tfrac{1}{2} \,\mathrm{grad}\, \mathbf{v}^2 \right] d\mathrm{S},$$

e conseguentemente dalla (17), tenendo presente la (16), si deduce la seguente altra espressione dell'energia cinetica del sistema:

$$\text{(20)} \qquad 2\mathrm{T} = \int_S \mathbf{r} \times \left[\frac{\partial \mu}{\partial t} \mathbf{v} - \mu\, (\mathrm{rot}\, \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} - \tfrac{1}{2}\, \mu \,\mathrm{grad}\, \mathbf{v}^2 \right] d\mathrm{S}.$$

Un'ulteriore trasformazione ci consentirà di attribuire infine a T una terza espressione, coincidente, nel caso di fluidi incomprimibili, con noti risultati.

Dalla identità

$$\mu\, \mathbf{r} \times \mathrm{grad}\, \mathbf{v}^2 = \mathrm{div}\,(\mu\, \mathbf{v}^2 \mathbf{r}) - 3 \mu\, \mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^2\, \mathbf{r} \times \mathrm{grad}\, \mu,$$

moltiplicata per $d\mathrm{S}$, si deduce, integrando a tutto S,

$$\int_S \mu\, \mathbf{r} \times \mathrm{grad}\, \mathbf{v}^2\, d\mathrm{S} = -6\mathrm{T} - \int_S \mathbf{v}^2\, \mathbf{r} \times \mathrm{grad}\, \mu\, d\mathrm{S} - \int_\sigma \mu\, \mathbf{v}^2\, \mathbf{r} \times \mathbf{n}\, d\sigma.$$

Per questa dalla (20) si può dedurre la seguente espressione di T:

$$\text{(21)} \quad \mathrm{T} = \int_S \mathbf{r} \times \left[\mu\, (\mathrm{rot}\, \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} - \tfrac{1}{2}\, \mathbf{v}^2\, \mathrm{grad}\, \mu - \frac{\partial \mu}{\partial t} \mathbf{v} \right] d\mathrm{S} - \tfrac{1}{2} \int_\sigma \mu\, \mathbf{v}^2\, \mathbf{r} \times \mathbf{n}\, d\sigma.$$

7. *Fluidi omogenei incomprimibili.* — Se la massa fluida è incomprimibile e omogenea, risulta costante la densità μ; in tal caso la precedente assume la forma più semplice

$$\text{(22)} \qquad \mathrm{T} = \mu \int_S \mathbf{r} \times [(\mathrm{rot}\, \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}]\, d\mathrm{S} - \frac{\mu}{2} \int_\sigma \mathbf{v}^2\, \mathbf{r} \times \mathbf{n}\, d\sigma,$$

già valutata per via diretta e utilmente applicata [1].

Se il fluido si estende indefinitamente ed è in riposo all'infinito, oppure, movendosi in uno spazio limitato, *aderisce* in modo completo al con-

[1] Cfr. Lamb, *Hydrodynamics* (Cambridge, 1916), pp. 211 e 212, espressioni (7) e (8). — Poincaré [*Théorie des tourbillons* (Paris, 1893), pag. 136] dà una dimostrazione diretta della (22) quando il fluido si estende indefinitamente e all'infinito è in riposo, per cui l'integrale di superficie scompare. Colgo l'occasione per rilevare un cambiamento di segno che va imposto alla formula di Poincaré, dato anche che la formula stessa è stata riportata con inesattezza [cfr. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, T. III (1921), pag. 470]. — L'errore di segno proviene dalla circostanza che i complementi algebrici degli elementi della prima riga del determinante D [v. Poincaré, loc. cit., pag. 136], designati con A, B, C, vanno cambiati di segno.

torno σ, l'integrale di superficie è nullo e la precedente espressione di T si riduce a

$$T = \mu \int_S \mathbf{r} \times [(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}]\, dS\,. \tag{23}$$

Scende da questa che se il fluido *effettivamente* si muove, cioè non è identicamente $\mathbf{v} = 0$ in tutto lo spazio S, *non può* darsi che il movimento sia di tal natura per cui si abbia in ogni punto di S

$$\mathbf{r} \times [(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}] = 0\,; \tag{24}$$

infatti in tal caso dalla (23) scende $T = 0$ e quindi $\mathbf{v} = 0$ in ogni punto di S, ciò che è contro l'ipotesi.

La (24) esprime che la velocità e il vortice sono ovunque complanari col vettore $\mathbf{r} = P - O$. Moti di tal natura (che, come abbiamo dimostrato, sono per un fluido omogeneo incomprimibile, impossibili in un ambiente limitato, oppure in uno spazio illimitato ma in riposo all'infinito) costituiscono una categoria abbastanza generale che — per quanto io sappia — non è stata finora oggetto di particolare considerazione. Essa comprende, come casi particolari, i moti irrotazionali: per i quali $\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = 0$, e i moti elicoidali di Beltrami [1], caratterizzati dal fatto che le linee di flusso coincidono colle linee vorticose, per cui $(\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) \wedge \mathbf{v} = 0$.

Geologia. — *Il grande « slittamento » delle masse calcaree secondarie dei monti Ausoni e Lepini sui terreni miocenici della Valle del Liri e della Valle Latina.* Nota del Corrisp. ing. SECONDO FRANCHI.

Fra i numerosi pozzi trivellati coraggiosamente eseguiti dalla Società « Petroli d'Italia » dal 1915 in poi nella bassa valle del Liri, tra S. Giovanni Incarico e Pico, il 1° è notevolmente produttivo fin da quell'anno, e l'ultimo, il 10°, compiuto mesi sono, dà la notevole produzione di litri 8000 al giorno, mentre alcuni hanno dato e dànno piccole produzioni, ed altri sono risultati finora completamente sterili.

Anche questi ultimi però sono molto interessanti, sì dal punto di vista scientifico che da quello pratico, per la luce che essi recano sulla costituzione litologica e geologica e sulla struttura tettonica di quelle regioni, dove esistono così interessanti manifestazioni di petrolio e di bitume e alle quali sembra sia riservato un prospero avvenire industriale.

(1) *Considerazioni idrodinamiche* [Rend. del R. Ist. Lombardo, vol. XXII (1889), pp. 121-130].