ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

NOTE PRESENTATE DA SOCI.

Matematica. — *Soluzione di un'equazione differenziale la cui funzione incognita è indice di derivazione.* Nota di P. Scatizzi S. J. presentata dal Socio V. Volterra.

La somma difficoltà che si riscontra nella soluzione delle equazioni differenziali, fa pensare alla ricerca di una nuova via, che ponga cioè il problema sotto un altro punto di vista. Ci si potrebbe, per esempio, proporre di trovare l'indice di derivazione adatto a trasformare l'equazione data in un'altra più semplice o facilmente solvibile. In tal caso è chiaro che s'impone lo studio di derivate ad indice variabile. Comunque, volendoci orientare verso tale direzione, simili derivate riusciranno, anche considerate in se stesse, uno strumento analitico più potente delle comuni derivate e di quelle ad indice numero reale qualunque. Lagrange asseriva che la derivazione generalizzata sarebbe stata la chiave del futuro calcolo [1]. Abel, Liouville e le stesse teorie di Volterra ci riportano, come mostrai, verso questo campo. Recentissime ricerche del Lévy, che per mezzo delle derivate ad indice frazionario ampliato riesce a risolvere equazioni integrali doppie, partendo dalla definizione del Riemann, confermano il mio asserto. L'occasione che dette origine a quest'ordine d'idee è stato il seguente problema:

« *Date due funzioni* $F(x, y, z \ldots)$ *ed* $f(x)$ *arbitrarie, purchè la seconda si annulli convenientemente per* $x = -\infty$, *esiste o no un indice* $s(x, y, z, \ldots)$ *tale che verifichi l'equazione*

$$[1] \qquad F(x, y, z \ldots) = \mathrm{D}^{-s(x\,y\,z\,\ldots)} f(x) \quad ? \text{ »}.$$

Le $x, y, z \ldots$ sono delle variabili indipendenti. Meno generalmente, si tratterebbe di risolvere l'equazione

$$[2] \qquad F(x) = \mathrm{D}^{-y} f(x)$$

dove y è la funzione incognita. Che un tale problema abbia un senso reale, e sia possibile, basterà dimostrarlo con qualche esempio. Ma prima conviene

(1) Lagrange, Berlin. Mem., 1772, pag, 186.

definire due specie di derivate: una ad indice variabile semplice, l'altra a doppio indice, della seguente forma:

$$[\alpha] \qquad \mathrm{D}_2^{-y(x)} f(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-\xi)^{y(x)-1}}{\Gamma(y(x))} f(\xi)\, d\xi$$

$$[\beta] \qquad \mathrm{D}_2^{[-y,\lambda]} f(x) = \int_0^x \frac{\lambda(\theta)\, d\theta}{x} \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-\xi)^{y(\theta)-1}}{\Gamma(y(\theta))} f(\xi)\, d\xi .$$

Come si vede, $[\alpha]$ è la medesima derivata Liouville–Molinari in cui si è sostituito, all'indice m costante di D_1^{-m} la funzione $y(x)$. Tale sostituzione è lecita, sia perchè l'integrale passa soltanto per ξ, sia perchè il senso analitico sostanzialmente permane, estendendosi a quello di variarsi l'ordine di derivazione lungo tutto l'intervallo.

Quanto alla derivata $[\beta]$ essa è funzione di $[\alpha]$ con l'aggiunta di un senso d'isteresi al valore dell'indice. Ossia si tien conto di tutta la serie dei valori costanti che l'indice $y(x)$ si suppone abbia dovuto assumere per giungere, variando, da $y(0)$ (con la condizione che $y(0) = \text{cost.}$) ad $y(x)$. Vi è poi l'aggiunta di una *funzione ausiliaria* $\lambda(x)$ arbitraria (con qualche comune condizione) e può anche prendersi costante. Lasciando ad altro tempo la dimostrazione della sua proprietà addittiva, basterà qui notare che:

1°. Per $y = k = \text{cost}$ la $\mathrm{D}_2^{[-k,\lambda]}$ si riduce alla D_1^{-k} di Liouville. Basterà infatti porre $\lambda = 1$

$$\mathrm{D}_2^{[-k,1]} f(x) = \int_0^x \mathrm{D}_1^{-k} f(x) \frac{d\theta}{x} = \mathrm{D}_1^{-k} f(x) .$$

2°. Ha la proprietà distributiva. Infatti

$$\mathrm{D}_2^{[-y,\lambda]} (a\varphi(x) + b\psi(x)) = \int_0^x \frac{1}{x} \mathrm{D}_2^{-y(\theta)} (a\varphi(x) + b\psi(x))\, \lambda(\theta)\, d\theta =$$

$$= a \int_0^x \frac{1}{x} \mathrm{D}_2^{-y(\theta)} \varphi(x)\, \lambda(\theta)\, d\theta + b \int_0^x \frac{1}{x} \mathrm{D}_2^{-y(\theta)} \psi(x)\, \lambda(\theta)\, d\theta =$$

$$= a\, \mathrm{D}_2^{[-y,\lambda]} \varphi(x) + b\, \mathrm{D}_2^{[-y,\lambda]} \psi(x) .$$

Faccio notare che $\mathrm{D}_2^{-y(\theta)}$ si può considerare come ad indice costante, rispetto ad x, quindi gode della proprietà distributiva al pari di D_1^{-m}.

Propongo ora un esempio della [1], specificando $f(x) = xe^x$. Avremo da risolvere l'equazione

$$\mathrm{F}(x, y, z \ldots) = \int_{-\infty}^{x} \frac{(x-\xi)^{s(x,y,z)-1}}{\Gamma(s(x, y, z \ldots))} \xi e^{\xi}\, d\xi$$

rispetto alla $s(x, y, z \ldots)$. Noto che l'integrale è convergente.

Dalla trasformazione $x - \xi = \eta$, trarremo successivamente:

$$F(x, y, z \ldots) = \int_0^\infty \frac{\eta^{s-1} e^{-\eta} x e^x d\eta}{\Gamma(s)} - \int_0^\infty \frac{\eta^s e^{-\eta} e^x d\eta}{\Gamma(s)}$$

$$F(x, y, z \ldots) = x e^x \frac{\Gamma(s(x,y,z,\ldots))}{\Gamma(s(x,y,z\ldots))} - e^x \frac{\Gamma(s(x,y,z,\ldots)+1)}{\Gamma(s(x,y,z\ldots))}$$

$$F(x, y, z \ldots) = x e^x - e^x s(x, y, z \ldots)$$

$$s(x, y, z \ldots) = x - e^{-x} F(x, y, z, \ldots).$$

Onde l'identità

$$F(x, y, z \ldots) = \mathrm{D}_2^{e^{-x} F(x,y,z\ldots) - x} x e^x.$$

Così pure è facile verificare che si ha identicamente

$$F(x y z \ldots) = \mathrm{D}_2^{\frac{1}{\log m}[\lg F(x y z \ldots) - mx]} e^{mx}.$$

E in generale, l'equazione

$$F(x, y, z \ldots) = \mathrm{D}_2^{[-u, \lambda]} f(x)$$

ci conduce all'inversione dell'equazione integrale

$$F(x y z \ldots) = \int_0^x \frac{1}{x} \mathrm{D}_2^{-u(\theta)} f(x) \lambda(\theta) d\theta$$

di nucleo

$$K(x, \theta) = \frac{1}{x} \mathrm{D}_2^{-u(\theta)} f(x).$$

Ma si ha che $|K(x\theta)| < M$ nel triangolo d'integrazione, per la condizione a cui la $f(x)$ soddisfa secondo il problema in [1], infatti allora la $\mathrm{D}_2^{-u(\theta)}$ sarà convergente; basta aggiungere che si abbia $u(0) = \text{cost}$, e rimanga finita nell'intervallo $|0, x|$ come è ovvio.

Ponendo simbolicamente

$$\Phi(x, y, z \ldots) = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{1}{K(x, x)}$$

con $K(x, x) = \frac{1}{x} \mathrm{D}_2^{-u(x)} f(x)$ come in [α], non nullo, e ricordando che

$$\mathrm{D}_x \mathrm{D}_2^{-u(\theta)} f(x) = \mathrm{D}_2^{-u(\theta)+1} f(x),$$

e si chiama $s(x\,,\theta)$ il nucleo risolvente di $\dfrac{\frac{\partial}{\partial x} K(x\,,\theta)}{K(x\,,x)}$, otterremo

$$\lambda(x\, y\, z\, ...) = \Phi(x\,, y\,, z\, ...) + \int_0^x s(x\,,\theta)\, \Phi(\theta\,, y\,, z\, ...)\, d\theta$$

onde l' identità generale

$$\mathrm{F}(x\,, y\,, z\, ...) = \mathrm{D}_2^{\left[-u\,,\, \Phi(x\,,y\,,z\,...) + \int_0^x s(x\,,\theta)\,\Phi(\theta\,,y\,,z\,...)\,d\theta\right]} f(x) \quad .$$

È chiaro che u rimane funzione arbitraria.

Infine, per risolvere il problema anche rispetto alla u, basta prendere $\lambda = \dfrac{u}{\mathrm{D}_2^{-u} f(x)}$, ma non ci si perviene che con approssimazioni successive secondo l'analisi di Lalesco, come il lettore potrà verificare facilmente da sè.

Fisica. — *Variabilità dell'assorbimento dell'atmosfera solare.* Nota del prof. A. Amerio, presentata dal Socio Cantone.

In una Nota precedente riguardante « L'attività del Sole e la costante solare », ho detto che sto eseguendo da due anni delle misure della distribuzione dell'energia sul disco solare, misure che ora sto proseguendo colla massima continuità consentitami dalle occupazioni, dal tempo e dalla poca comodità con cui attualmente le posso eseguire.

Poichè con quelle fatte sinora sono riuscito a rendere evidente l'esistenza di variazioni che questa distribuzione subisce da un giorno all'altro, riferisco in proposito.

Queste determinazioni mirano esclusivamente a ricercare le eventuali variazioni del potere assorbente dell'atmosfera solare, perciò non ho ritenuto conveniente estenderle a molti punti del disco. La ragione è che, quando si passa dal centro del disco a 15° e a 30°, si ottengono piccole differenze tra le rispettive radiazioni, per cui le loro variazioni possono essere dell'ordine di grandezza degli errori di misura, pei 45° queste variazioni sono di poco superiori; mentre per 60° e meglio ancora per 75° li superano di molto. Mi convenne quindi limitare le misure alle radiazioni del centro e dei punti a 60° e a 75° per determinare i rapporti tra queste e la prima. Con ciò si aveva anche il vantaggio di poter eseguire le serie rapidamente, evitando più facilmente le eventuali variazioni atmosferiche che avrebbero potuto perturbarle.