ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Nozioni di geometria proiettivo-differenziale relative ad una superficie dello spazio ordinario.* Nota di E. Bompiani, presentata dal Socio G. Castelnuovo (¹).

1. Scopo di questa Nota è di esporre alcune nozioni geometriche relative ad una superficie dello spazio ordinario, ed in particolare di caratterizzare geometricamente la normale proiettiva di Fubini (²).

Su queste nozioni, di carattere introduttivo, farò vedere in seguito come si possa costruire una geometria intrinseca della superficie rispetto al gruppo delle applicabilità proiettive.

2. Richiamo brevemente alcune cose note, accompagnandole con proprietà nuove. La superficie s'intende non rigata; O suo punto generico, ω piano ivi tangente.

1) Quadrica di Lie, Q. — È la quadrica osculatrice in O alla rigata delle tangenti asintotiche di un sistema nei punti dell'asintotica dell'altro sistema passante per O; non muta scambiando fra loro i due sistemi di asintotiche. Si può aggiungere:

La quadrica di Lie è anche il luogo dei punti singolari della rete di complessi determinata dalla congruenza lineare speciale osculatrice in O *ad una delle asintotiche e dal complesso osculatore alla rigata delle tangenti asintotiche dell'altro sistema nei punti della asintotica considerata.*

2) Tangenti di Darboux e tangenti di Segre. — Le prime sono le tre rette triple nell'involuzione delle terne di tangenti alle curve aventi un punto triplo in O determinate dalle quadriche aventi ivi contatto di 2° ordine con la superficie. Le tangenti di Segre sono le coniugate di queste (nel senso di Dupin, rispetto alle asintotiche). Un'altra definizione può vedersi in Segre (³). Una nuova proprietà di queste due terne di tangenti (che può servire a definirle) le collega alla quadrica di Lie e alla corrispondenza fra i punti e i piani ivi tangenti alla superficie.

Si consideri la corrispondenza (di Segre; introdotta nel lavoro citato) che si ottiene associando ad ogni elemento di 2° ordine di curva (della superficie) uscente da O il suo piano osculatore e il punto dello spigolo di

(¹) Presentata nella seduta del 13 gennaio 1924.

(²) Questa Nota era già stata consegnata per la presentazione quando sono apparse le due Note del prof. G. Fubini: *Alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale* (questi Rendic. fasc. del 4 e 18 nov. 1923). Per quanto sullo stesso argomento, non ho modificato la mia Nota perchè contiene risultati diversi.

(³) C. Segre, *Complementi alla teoria delle tangenti coniugate di una superficie* (Rend. Lincei, serie 5ª, vol. XVII, 1908).

regresso della sviluppabile circoscritta alla superficie secondo quell'elemento. Allora:

Nella corrispondenza di Segre fra i piani della stella di centro O *e i punti di* ω, *ad un fascio di piani* (*per* O) *corrisponde* (*in* ω) *una cubica avente nodo in* O *e per tangenti quelle asintotiche: l'asse del fascio e la retta passante per i flessi della cubica sono polari reciproche rispetto alla quadrica di Lie.*

I flessi di una qualsiasi di queste cubiche si trovano sulle tre tangenti di Darboux (*sicchè la conoscenza di una cubica basta a costruire queste*).

O in altri termini:

Se nella corrispondenza di Segre fra la stella di piani per O *e i punti di* ω *si polarizza la stella rispetto a* Q, *si ottiene una corrispondenza cubica fra due piani sovrapposti* (*sostegno* ω) *avente per rette unite* (*come luoghi di punti*) *le tre tangenti di Darboux; ad una retta di un piano corrisponde nell'altro una cubica avente i flessi sulla retta stessa.*

La corrispondenza è determinata appena si conoscano le tangenti asintotiche, le tangenti di Darboux e una coppia di punti corrispondenti P, P' (allineati con O): l'omologo di un punto Q (non appartenente ad OP) sta sulla OQ e sulla cubica che tocca in O le tangenti asintotiche, che ha i flessi nelle intersezioni di PQ con le tangenti di Darboux e che passa per P'.

Dualmente, polarizzando ω rispetto alla quadrica di Lie si hanno le tangenti di Segre (come luoghi dei piani uniti etc.).

3) Retta di Segre, S. — I piani osculatori in O alle linee di Segre (cioè inviluppate dalle tangenti di Segre) vanno a passare per una retta, trovata da Čech (1), che si dirà retta di Segre. Dualmente, polarizzando rispetto a Q, si ha in ω una *retta di Darboux*.

4) Retta di Wilczynski, W. — È la retta per O direttrice, insieme alla sua polare rispetto a Q, della congruenza intersezione dei due complessi lineari osculatori in O alle asintotiche.

Se ne può dare l'altra proprietà caratteristica seguente:

Si considerino i quattro punti (*oltre* O) *nei quali* Q *tocca il proprio inviluppo* (*al variare di* O); *i due lati del quadrangolo completo così determinato, non appartenenti a* Q, *sono rette reciproche rispetto a* Q: *la retta per* O *ad esse appoggiata è* W (*l'altra retta di Wilczynski si appoggia pure a quelle due e giace in* ω).

5) Retta di Green, G. — Se ne veda la definizione nel lavoro di Green (2) e un'altra proprietà caratteristica in Čech, l. c. (consideriamo quella delle due rette passante per O).

(1) E. Čech, *L'intorno di un punto di una superficie considerato dal punto di vista proiettivo* (Annali di Matem., serie 3ª, tomo XXXI, 1922).

(2) Green, *Memoir on the general theory of surfaces and rectilinear congruences* (Transact. of the Amer. Math. Soc., vol. XX, 1919).

6) Retta di Fubini o normale proiettiva, F. — La definizione [1] dipende dalla *normalizzazione*, che segue, delle coordinate proiettive.

3. S'indichi [2] con $x(u,v)$ una generica delle coordinate proiettive omogenee di un punto O della superficie riferita alle sue asintotiche (rappresentate da $du=0$, $dv=0$); e con g una forma differenziale quadratica arbitraria in du, dv: si possono sempre costruire le due forme (che risultano di 1° ordine nei differenziali, e di grado indicato dall'indice)

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{A}}(x, x_u, x_v, d^2x)$$

$$F_3 = -3\, dF_2 + \frac{2}{\sqrt{A}}(x, x_u, x_v, d^3x) + \frac{3}{4} F_2\, d \log \frac{\Delta}{A}$$

ove $x_u = \frac{\partial x}{\partial u}$, $x_v = \frac{\partial x}{\partial v}$; A e Δ sono rispett. i discriminanti di g e di F_2.

$F_2 = 0$ e $F_3 = 0$ definiscono rispett. le linee asintotiche e quelle di Darboux: *comunque si variino g e il fattore d'omogeneità nelle x rimane inalterato il rapporto* F_3/F_2.

Posto $\varphi_2 = \lambda F_2$, $\varphi_3 = \lambda F_3$, *si può fissare intrinsecamente* λ in modo che il discriminante di φ_3 sia uguale, a meno di un fattor numerico inessenziale, al cubo del discriminante di φ_2; e *si può poi prendere* $g \equiv \varphi_2$.

Con questa normalizzazione, $\varphi_2 = 2\beta\gamma\, du\, dv$, $\varphi_3 = 2\beta\gamma\,(\beta du^3 + \gamma dv^3)$ e le *coordinate normali* x soddisfano alle equazioni

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} x_u + \beta x_v + nx \quad ; \quad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \gamma x_u + \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} x_v + \nu x .$$

La conoscenza di φ_2, φ_3 individua la superficie nel gruppo delle applicabilità proiettive.

[1] G. Fubini, *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie* (Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, vol. LIII, 1918) e due Note dallo stesso titolo nel Rend Lincei, vol. XXVII, 1918. Nella 2ª delle due Note citate in principio, Fubini considera (§ 11) le superficie per le quali due delle rette nominate (quindi tutte) coincidono. Per tali superficie valgono le proprietà caratteristiche seguenti:

1ª) *Esse sono tutte proiettivamente applicabili sulla superficie cubica* $xyz = 1$; *e questa è l'unica di esse (a meno di collineazioni) per la quale le linee proiettive di curvatura sono indeterminate (le normali proiettive passano per un punto; è l'analogo proiettivo della sfera)*;

2ª) *I tre sistemi di linee di Darboux sono costituiti da geodetiche di* φ_2;

3ª) *Le geodetiche di* φ_2 *e di* φ_3 *coincidono* (φ_2 *e* φ_3 *sono le forme normali di Fubini*).

[2] Riassumo brevemente dalle Note ora citate quanto è strettamente necessario per intendere la normalizzazione: ved. particolarmente la 1ª Nota Lincèa.

In queste coordinate normali la retta congiungente il punto x *col punto* $x_{uv} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}$, *brevemente* (x, x_{uv}) *è la normale proiettiva di Fubini.*

4. La scelta estremamente felice di queste coordinate rende desiderabile di conoscerne il significato geometrico.

È chiaro che la normalizzazione ha per effetto di coordinare a ciascun punto $O(x)$ un *tetraedro* (*di Fubini*), invariante per applicabilità proiettiva; esso ha per vertici i punti x, x_u, x_v, x_{uv}: *i due lati* (x, x_{uv}) *e* (x_u, x_v) *sono polari rispetto a* Q, *anch'essa invariante per applicabilità proiettive; sicchè per definire il tetraedro di Fubini basta costruire geometricamente la normale proiettiva e su di essa il punto* x_{uv}.

5. È noto (¹) che i piani osculatori alle geodetiche di φ_2 $\left(\delta \int \sqrt{\varphi_2} = 0\right)$ in O inviluppano un cono di 3ª classe bitangente ad ω lungo le tangenti asintotiche: i tre piani tangenti cuspidali del cono tagliano ω lungo le tangenti di Segre e passano per la normale proiettiva. Anche questa determinazione della normale dipende dal fattore di normalizzazione di φ_2.

Che cosa accade se invece di φ_2 si prende $e^{2h} \varphi_2$ (con h arbitrario)?

Le geodetiche di tutte le metriche proiettive, fra loro conformi, individuate dalle linee asintotiche, appartengono alla famiglia di linee studiate da Fubini (²), *di equazione differenziale*

$$\sqrt{-\Delta}\,(du\, \delta^2 v - dv\, \delta^2 u) = \overline{\psi}_3 + l(h_1\, du - h_2\, dv)\, \varphi_2$$

e precisamente per esse si ha $\overline{\psi}_3 \equiv 0$, $l h_1 = \dfrac{\partial h}{\partial u} = h_u$, $l h_2 = \dfrac{\partial h}{\partial v} = h_v$.

I piani osculatori in O *alle geodetiche di* $e^{2h} \varphi_2$ *inviluppano sempre un cono di 3ª classe i cui piani tangenti cuspidali tagliano* ω *nelle tangenti di Segre e passano per la retta* (*che dirò pseudo-normale*) *congiungente* x *con* $x_{uv} + h_v x_u + h_u x_v$.

Inoltre: *le sviluppabili di una congruenza di pseudonormali segano sempre* (*qualunque sia* h) *sulla superficie un doppio sistema coniugato; e viceversa, ogni congruenza di questo tipo definisce*, a meno di un fattor numerico inessenziale, *una metrica* $e^{2h} \varphi_2$ *per la quale la congruenza data è quella delle pseudonormali.*

Fin qui, dunque, nulla distingue la congruenza delle normali da una congruenza di pseudonormali.

Le rette F, S, W, G stanno in un piano (detto da Fubini *canonico*) che si può costruire indipendentemente dalla normalizzazione (contenendo S, W, G).

(¹) Ved. *Fondamenti* etc. (Atti di Torino, pag. 1037 in fine).

(²) Ved. *Fondamenti* etc. [Atti di Torino, pag. 1034, (4)].

Se s'impone ad una congruenza di pseudonormali di avere la sua retta per O *nel piano canonico relativo ad* O (*condizione indipendente dalla normalizzazione*) *si ottiene per* h *la determinazione*

$$h = \int \varrho \left(\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} du + \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} dv \right)$$

ϱ *essendo un qualsiasi fattore integrante del differenziale in parentesi* (a $\varrho = 0$ corrisponde la normale di Fubini).

Sicchè neppure questa condizione caratterizza la normale di Fubini: *questa viene individuata quando alle condizioni precedenti si aggiunga infine l'altra che sia costante il birapporto* (F, S, W, G).

6. A questa caratterizzazione, piuttosto faticosa, della normale proiettiva ne sostituirò (in 7) una concettualmente più semplice.

In questo numero segnalo una nuova retta, passante per O e situata come le precedenti nel piano canonico, che nasce da una ricerca analoga.

Si considerino le estremali della forma normale $\varphi_3 \left(\delta \int \sqrt[3]{\varphi_3} = 0 \right)$: *i piani ad esse osculatori in* O *inviluppano un cono di 5ª classe avente* ω *per piano tangente quadruplo* (*le generatrici di contatto essendo le tangenti asintotiche da contarsi due volte*).

L'Hessiano di questo inviluppo conico si spezza nei due fasci di piani passanti per le asintotiche, che indicherò con f_1, f_2, ciascuno da contarsi due volte (f_1^2, f_2^2) ed in un cono residuo di 5ª classe.

Nel fascio determinato da questi due inviluppi c'è uno di essi che si spezza in f_1, f_2 ed in un cono di 3ª classe, anch'esso bitangente ad ω.

I tre piani tangenti cuspidali a questo cono vanno a passare per una nuova retta, B, *contenuta nel piano canonico e formante gruppo armonico con la retta di Segre* S, *con la tangente canonica* T (*intersezione di* ω *col piano canonico*) *e con la retta di Wilczynski* W *o con la retta di Green* G; precisamente:

$$(\mathrm{S}, \mathrm{W}, \mathrm{B}, \mathrm{T}) = -1 \quad , \quad (\mathrm{S}, \mathrm{T}, \mathrm{B}, \mathrm{G}) = -1 .$$

Alla stessa retta B si arriva considerando nella rete individuata dal primo inviluppo conico (dei piani osculatori alle geodetiche di φ_3) e dai due inviluppi f_1^5, f_2^5 l'unico inviluppo spezzato nei due fasci $f_1 f_2$ e in un inviluppo cubico residuo: i tre piani cuspidali di questo contengono B.

Se invece si parte dalla forma $e^{2h} \varphi_3$ si può anche ad essa collegare per ogni punto O una retta: ed è notevole che questa e la pseudonormale relativa ad $e^{2h} \varphi_2$ stanno o non stanno insieme nel piano canonico; e se la seconda è la retta F, la prima è la retta B e viceversa.

La conoscenza della retta B, subito costruibile mediante un gruppo armonico, dà quindi un nuovo mezzo di raggiungere la normalizzazione di Fubini.

7. La via più naturale, per tale scopo, appare però la seguente. Poichè il rapporto $F_3/F_2 = \varphi_3/\varphi_2$ ha sempre lo stesso valore, quali si siano le coordinate, anche non normali, con le quali si costruisce, è spontaneo di ricorrere ad esso per trovare la normale proiettiva. E si ha [1]:

Le estremali di $\int \frac{\varphi_3}{\varphi_2} = \int \frac{F_3}{F_2}$ *passanti per un punto* O *hanno i piani ivi osculatori tangenti ad un cono di 6ª classe: il piano* ω *lo tocca lungo le due tangenti asintotiche e le tre tangenti di Darboux.*

Nel sistema lineare individuato da quest'inviluppo conico e dai quattro inviluppi degeneri seguenti $f_1^5 f_2$, $f_1^4 f_2^2$, $f_1^2 f_2^4$, $f_1 f_2^5$ *ve n'è uno solo che si spezza nei tre fasci di piani passanti per le tangenti di Darboux e in un inviluppo cubico residuo: i tre piani cuspidali di questo vanno a passare per la normale proiettiva.*

Questa risulta quindi individuata indipendentemente dalla normalizzazione.

8. Ottenuta la normale proiettiva in O è facile individuare su di essa il punto $N = x_{uv}$.

Si considerino le due rigate luoghi delle normali proiettive uscenti dai punti delle due asintotiche per O. Il piano tangente in O ad una di esse tocca l'altra rigata in un punto C della normale proiettiva: se M è l'ulteriore punto ($\neq$ O) d'incontro della normale con la quadrica di Lie, il punto N cercato è il quarto armonico dopo O, C, M:

$$(O, C, M, N) = -1.$$

Fisica. — *Sopra la riflessione e la diffusione di risonanza.* Nota di Enrico Fermi, presentata dal Socio Corbino [2].

1. Se si illumina un gas o vapore con luce di frequenza eguale a quella della sua riga di risonanza, si produce il fenomeno, scoperto da Wood [3], della così detta risonanza ottica, che consiste nel fatto che la luce primaria viene assai intensamente diffusa dal gas, per modo che bastano spesso degli strati estremamente sottili del gas per assorbire completamente la luce primaria. Ora si osserva questo fatto [4]: finchè la pressione del gas è sufficientemente piccola, quasi tutta la luce di risonanza viene diffusa irregolarmente in tutte le direzioni; quando invece la pressione diventa abbastanza grande, la maggior parte viene invece riflessa regolarmente, e solo una piccola parte viene sparpagliata in tutte le direzioni. Siccome non mi consta

[1] Le estremali di $\int \varphi_3/\varphi_2$ sono pure considerate da Fubini (2ª Nota in principio § 10) col nome di ipergeodetiche.

[2] Presentata nella seduta del 13 gennaio 1924.

[3] Wood, Phil. Mag. dal 1905 al 1912.

[4] Wood, Phil. Mag., 23 (1912), pag. 689; Dunoyer, C. R. 156 (1913), pag. 1067.