ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

7. La via più naturale, per tale scopo, appare però la seguente. Poichè il rapporto $F_3/F_2 = \varphi_3/\varphi_2$ ha sempre lo stesso valore, quali si siano le coordinate, anche non normali, con le quali si costruisce, è spontaneo di ricorrere ad esso per trovare la normale proiettiva. E si ha [1]:

Le estremali di $\int \frac{\varphi_3}{\varphi_2} = \int \frac{F_3}{F_2}$ *passanti per un punto* O *hanno i piani ivi osculatori tangenti ad un cono di 6ª classe: il piano* ω *lo tocca lungo le due tangenti asintotiche e le tre tangenti di Darboux.*

Nel sistema lineare individuato da quest'inviluppo conico e dai quattro inviluppi degeneri seguenti $f_1^5 f_2$, $f_1^4 f_2^2$, $f_1^2 f_2^4$, $f_1 f_2^5$ *ve n'è uno solo che si spezza nei tre fasci di piani passanti per le tangenti di Darboux e in un inviluppo cubico residuo: i tre piani cuspidali di questo vanno a passare per la normale proiettiva.*

Questa risulta quindi individuata indipendentemente dalla normalizzazione.

8. Ottenuta la normale proiettiva in O è facile individuare su di essa il punto $N = x_{uv}$.

Si considerino le due rigate luoghi delle normali proiettive uscenti dai punti delle due asintotiche per O. Il piano tangente in O ad una di esse tocca l'altra rigata in un punto C della normale proiettiva: se M è l'ulteriore punto ($\neq$ O) d'incontro della normale con la quadrica di Lie, il punto N cercato è il quarto armonico dopo O, C, M:

$$(O, C, M, N) = -1.$$

Fisica. — *Sopra la riflessione e la diffusione di risonanza.* Nota di Enrico Fermi, presentata dal Socio Corbino [2].

1. Se si illumina un gas o vapore con luce di frequenza eguale a quella della sua riga di risonanza, si produce il fenomeno, scoperto da Wood [3], della così detta risonanza ottica, che consiste nel fatto che la luce primaria viene assai intensamente diffusa dal gas, per modo che bastano spesso degli strati estremamente sottili del gas per assorbire completamente la luce primaria. Ora si osserva questo fatto [4]: finchè la pressione del gas è sufficientemente piccola, quasi tutta la luce di risonanza viene diffusa irregolarmente in tutte le direzioni; quando invece la pressione diventa abbastanza grande, la maggior parte viene invece riflessa regolarmente, e solo una piccola parte viene sparpagliata in tutte le direzioni. Siccome non mi consta

[1] Le estremali di $\int \varphi_3/\varphi_2$ sono pure considerate da Fubini (2ª Nota in principio § 10) col nome di ipergeodetiche.

[2] Presentata nella seduta del 13 gennaio 1924.

[3] Wood, Phil. Mag. dal 1905 al 1912.

[4] Wood, Phil. Mag., 23 (1912), pag. 689; Dunoyer, C. R. 156 (1913), pag. 1067.

che di questo fenomeno sia ancora stata data una interpretazione ben chiara, cercherò in questo lavoro di svilupparne la teoria matematica, la quale, oltre a dare codesta interpretazione, permetterà anche di assegnare le condizioni sperimentali per le quali è più facile l'osservazione della riflessione di risonanza.

2. Supponiamo che il nostro gas sia contenuto in un recipiente prismatico a base quadrata di lato B coi lati paralleli agli assi y, z, illimitato dalla parte delle x positive, e nel senso opposto limitato dal piano $x = 0$. Supponiamo poi che la luce primaria, di frequenza ν, abbia coseni di direzione l, m, n, ed investa la base del prisma, ed osserviamo la luce secondaria nella direzione di coseni α, β, γ, $(\alpha < 0)$. Sia k il coefficiente d'assorbimento; se il punto P di osservazione è abbastanza lontano dal gas, ed r è la sua distanza dal centro delle coordinate, si riconosce subito che, prescindendo dall'influenza dei bordi, l'ampiezza della luce secondaria in P è data da

$$\sum_h \frac{A}{r} e^{-\frac{k}{2}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{\alpha}\right)x_h} e^{2\pi i\nu\left(t-\frac{r}{c}\right)} e^{-\frac{2\pi i}{\lambda}\left\{(l-\alpha)x_h+(m-\beta)y_h+(n-\gamma)z_h\right\}}.$$

Dove l'indice h distingue i varii atomi del gas, e la somma si deve estendere a tutti questi atomi, A è un coefficiente di proporzionalità. Per passare dall'ampiezza all'intensità basta, come è noto, moltiplicare l'ampiezza precedente per il numero suo complesso coniugato. L'intensità è dunque

$$I = \frac{A^2}{r^2} \sum_{hj} e^{-\frac{k}{2}\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{\alpha}\right)(x_h+x_j)} \times$$
$$\times e^{\frac{2\pi i}{\lambda}\left\{(l-\alpha)(x_j-x_h)+(m-\beta)(y_j-y_h)+(n-\gamma)(z_j-z_h)\right\}}.$$

La somma deve naturalmente estendersi, per entrambi gli indici h, j, a tutti gli atomi presenti. Per effettuarla ci conviene spezzare I nella somma di due addendi I_1 ed I_2, dei quali il primo si ottenga come contributo dei termini della sommatoria per i quali $h = j$, ed il secondo sia il contributo dei termini per cui $h \neq j$. Avremo allora

$$I_1 = \frac{A^2}{r^2} \sum_h e^{-k\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{\alpha}\right)x_h}$$

che potrà calcolarsi sostituendo la somma con l'integrale triplo

$$I_1 = \frac{NA^2}{r^2} \int_0^\infty \int_{-B/2}^{B/2} \int_{-B/2}^{B/2} e^{-k\left(\frac{1}{l}-\frac{1}{\alpha}\right)x} dx\, dy\, dz,$$

essendo N il numero di atomi per unità di volume. Calcolando l'integrale si trova

$$(1) \qquad I_1 = \frac{N A^2 B^2}{k r^2 \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Si ha poi

$$I_2 = \frac{A^2}{r^2} \sum_{h \neq j} e^{-\frac{k}{2}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{\alpha}\right)(x_h + x_j)} e^{\frac{2\pi i}{\lambda}\left\{(l-\alpha)(x_j - x_h) + \cdots\right\}}.$$

Anche quì possiamo ora sostituire la somma con un integrale sestuplo [1]; si trova quindi

$$I_2 = \frac{A^2 N^2}{r^2} \int\int\int\int\int\int e^{-\frac{k}{2}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{\alpha}\right)(x + \xi)} e^{\frac{2\pi i}{\lambda}\left\{(l-\alpha)(\xi - x) + \cdots\right\}} dx\, dy\, dz\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

ed effettuando le quadrature

$$(2) \qquad I_2 = \frac{4 A^2 N^2 \lambda^4}{\pi^4 r^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi B}{\lambda}(m - \beta)}{(m - \beta)^2} \frac{\sin^2 \frac{\pi B}{\lambda}(n - \gamma)}{(n - \gamma)^2} \times$$
$$\times \frac{1}{\frac{k^2}{4}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}(l - \alpha)^2}.$$

Si vede ora che mentre I_1 ha, come funzione di α, β, γ, un andamento regolare (poichè $l > 0 > \alpha$), I_2 presenta invece un massimo assai pronunziato quando $m = \beta$, $n = \gamma$ e quindi $l = -\alpha$, purchè, come vogliamo ammettere, sia $B \gg \lambda$. Questo massimo corrisponde ad una riflessione regolare; I_1 ci rappresenterà dunque la luce diffusa in tutte le direzioni, I_2 quella riflessa regolarmente. Siccome poi I_1 è proporzionale ad N, e I_2 ad N^2, si capisce anche come, al crescere della densità, I_2 vada poco a poco a prendere il sopravvento sopra I_1, come appunto sperimentalmente si osserva.

3. Per discutere però in un caso più concreto le circostanze di questo fenomeno, ci converrà modificare leggermente le premesse. Mentre fin'ora abbiamo preso come sorgente della luce primaria un punto all'infinito, prenderemo ora un piccolo disco circolare, pure all'infinito. Sia ϱ_0 l'angolo sotto cui si vede il suo raggio; prendiamo poi le coordinate in modo che i coseni direttori del centro siano $-\cos\theta$, $-\sin\theta$, 0 (θ = angolo di incidenza) ed osserviamo nella direzione $\alpha = -\cos\theta$, $\beta = \sin\theta$, $\gamma = 0$ in cui si riflette il raggio proveniente dal centro. Per il punto della sorgente,

[1] Questo non sarebbe più lecito se non si fossero già trattati a parte i termini per i quali $h = j$ che darebbero luogo a delle singolarità.

di coordinate polari sferiche [1] ϱ, φ avremo allora approssimativamente

$$l = \cos\theta + \varrho\cos\varphi\sin\theta\,;\quad m = \sin\theta - \varrho\cos\varphi\cos\theta\,;\quad n = -\varrho\sin\varphi$$

e quindi applicando la (1) e la (2) si trova in questo caso

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{2N\lambda^4 k}{\pi^5\varrho_0^2 B^2\left(k^2 + \frac{16\pi^2}{\lambda^2}\cos^4\theta\right)\cos\theta} \times$$

$$\times \int_0^{\varrho_0}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi B}{\lambda}\varrho\cos\varphi\cos\theta\right)\sin^2\left(\frac{\pi B}{\lambda}\varrho\sin\varphi\right)}{\varrho^3\cos^2\varphi\sin^2\varphi}\,d\varrho\,d\varphi =$$

$$= \frac{2N\lambda^2 k}{\pi^3\varrho_0^2\cos\theta\left(k^2 + \frac{16\pi^2}{\lambda^2}\cos^4\theta\right)} \times$$

$$\times \int_0^{\frac{\pi B\varrho_0}{\lambda}}\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(x\cos\varphi\cos\theta)\sin^2(x\sin\varphi)}{x^3\cos^2\varphi\sin^2\varphi}\,dx\,d\varphi\,.$$

Distinguiamo ora secondo che $B\varrho_0/\lambda$ è molto grande o molto piccolo. Nel primo caso potremo sostituire il limite superiore del primo integrale con ∞. Allora il valore dell'integrale doppio è $\pi^2\cos\theta$ e quindi

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{2N\lambda^2 k}{\pi\varrho_0^2\left(k^2 + \frac{16\pi^2}{\lambda^2}\cos^4\theta\right)}\,. \tag{3}$$

Se invece $B\varrho_0/\lambda \ll 1$, si potrà nell'integrale doppio sostituire gli archi ai seni; si trova quindi facilmente

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{2NB^2 k\cos\theta}{k^2 + \frac{16\pi^2}{\lambda^2}\cos^4\theta}\,. \tag{4}$$

4. Per esempio, supponiamo che sia $\varrho_0 = 1/10$. Allora, escluso il caso che B sia straordinariamente piccolo, saremo in condizioni da applicare la (3), e troviamo che, perchè I_2 sia dell'ordine di grandezza di I_1, condizione evidentemente necessaria per l'osservazione della riflessione di risonanza, e ponendo $k = 100$ deve essere come ordine di grandezza $N = 10^{20}$ ciò che corrisponde a una pressione di qualche atmosfera. Si spiega con ciò l'insuccesso di Dunoyer nell'osservazione della riflessione di risonanza per il sodio, il cui vapore non si può comodamente osservare che a pressioni abbastanza basse.

[1] S'intende, nel piano all'infinito, con polo nel centro della sorgente.