ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1924.

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Meccanica. — *Determinazione rigorosa delle onde irrotazionali periodiche in acqua profonda.* Nota del Socio T. Levi-Civita [1].

In una comunicazione al Congresso internazionale di meccanica, che ebbe luogo a Delft nello scorso Aprile (e anche in una conferenza tenuta al Seminario matematico della R. Università di Roma), tratteggiai la questione enunciata nel titolo, e il metodo con cui si perviene a risolverla [2]. Una notizia abbastanza ampia di questa comunicazione apparirà quanto prima negli Atti di quel Congresso; mentre la ricerca *in extenso*, cogli sviluppi delle dimostrazioni e dei calcoli, si trova in corso di stampa nei « Mathematische Annalen ».

Mi permetto frattanto di indicare rapidamente l'aspetto matematico della questione, l'algoritmo risolutivo che ne fornisce gli integrali sotto forma di serie, il risultato numerico del calcolo dei primi termini, alcune formule generali e la loro illustrazione meccanica.

(1) Pervenuta all'Accademia il 9 agosto 1924.

(2) Il sig. Nékrassow era pervenuto per suo conto a conclusioni analoghe (forse un po' meno specificate dal punto di vista applicativo, ma con ulteriori risultati nei riguardi esistenziali), ricorrendo alla teoria delle equazioni integrali. Egli ebbe la cortesia di informarmene, trasmettendomi anche una redazione francese delle sue ricerche (già pubblicate in lingua russa). Potei così comunicarne io stesso il contenuto al Congresso di Delft.

1. — Questione analitica cui può essere ricondotto il problema meccanico.

Dalle considerazioni generali sulle onde irrotazionali, esposte parecchi anni or sono in questi Rendiconti [1], e raccolte recentemente nella Conferenza III del volume *Questioni di meccanica classica e relativista* [2], segue (con facili adattamenti al caso di una profondità infinita) che la determinazione di tutti i possibili tipi di onde periodiche, atte a propagarsi senza alterazione di forma, si riduce alla seguente questione analitica:

Assegnare tutte le funzioni

$$\omega(\zeta) = \vartheta + i\tau \qquad (\vartheta \text{ parte reale})$$

della variabile complessa $\zeta = \varrho e^{i\sigma}$ (ϱ modulo), regolari entro il cerchio $|\zeta| \leq 1$ ($\mathfrak{D}$ della fig. 1), nulle nel centro O ($\zeta = 0$)

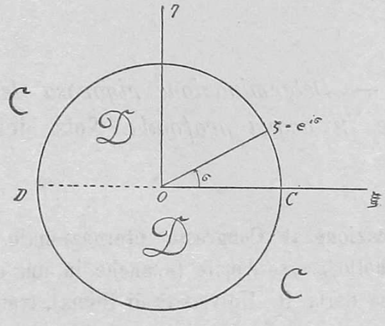

Fig. 1

e soddisfacenti, sopra la circonferenza $\mathfrak{C}$ ($|\zeta| = \varrho = 1$), all'equazione

$$\text{(I)} \qquad \frac{d\tau}{d\sigma} = pe^{-3\tau} \sin \vartheta \, ,$$

dove p designa un parametro positivo *a priori* indeterminato.

Ogni siffatta funzione $\omega(\zeta)$, non identicamente nulla, dà luogo a un tipo effettivo di onde periodiche permanenti, purchè soltanto sussista, in tutto il campo $|\zeta| \leq 1$, la disuguaglianza

$$\text{(1)} \qquad |e^{-i\omega} - 1| < \beta \, ,$$

[1] Vol. XVI (2° sem. 1907), pagg. 776-790; vol. XXI (1° sem. 1912), pagg. 3-14.

[2] Bologna, Zanichelli, 1924; già pubblicate due anni or sono in catalano per cura del prof. Terrádas (Barcelona, Institut d'estudis catalans).

essendo β una frazione propria che, nei casi praticamente interessanti, è piuttosto piccola (per es., non superiore ad $^1/_{10}$). Comunque, la (1) rimane automaticamente verificata per $|\omega|$ abbastanza piccolo.

La costante p è legata ad elementi essenziali del fenomeno (λ, c lunghezza e velocità di propagazione dell'onda; g accelerazione della gravità) a norma della formula

$$(\mathrm{II}) \qquad p = \frac{g\lambda}{2\pi c^2};$$

$c|e^{-i\omega}| = c e^{\tau}$ rappresenta la grandezza della velocità delle particelle liquide, *relativa* all'onda (velocità poco diversa da c, in quanto, trattandosi di onde, il moto assoluto delle singole particelle deve ridursi a piccole oscillazioni); infine ϑ misura l'inclinazione della suddetta velocità sulla orizzontale, inclinazione che rimane anch'essa sempre piuttosto piccola in tutto il campo del moto.

Va notato subito che ci si può limitare a contemplare valori di $p \leq 1$, perchè da ogni soluzione della (1), corrispondente a un tale valore di p, se ne possono dedurre infinite altre in cui p è sostituito da np, con n intero arbitrario: codeste soluzioni (sostanzialmente coincidenti dal punto di vista meccanico) provengono dal risguardare come nuova onda semplice l'aggregato di n delle onde corrispondenti alla soluzione inizialmente considerata.

2. — Onde semplici di Airy.

Se $\omega = \vartheta + i\tau$ si tratta come infinitesima, l'equazione (I) si riduce a

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - p\vartheta = 0, \quad \text{su } \mathfrak{C}.$$

Designando genericamente con $\Re\omega$ la parte reale di una quantità complessa ω, si ha intanto, per la nostra funzione $\omega(\zeta)$, $p\Re\omega = p\vartheta$; siccome poi, su $\mathfrak{C}$, $\zeta = e^{i\sigma}$, e quindi $d\sigma = \frac{d\zeta}{i\zeta}$, si ha anche $\Re\,\zeta\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{d\tau}{d\sigma}$. La precedente equazione può, così, essere scritta

$$\Re\left(\zeta\frac{d\omega}{d\zeta} - p\omega\right) = 0, \quad \text{su } \mathfrak{C},$$

e sta a dire che la funzione $\zeta\frac{d\omega}{d\zeta} - p\omega$, regolare entro $\mathfrak{C}$, ha parte reale nulla sulla circonferenza; la funzione stessa si riduce perciò ad una costante puramente immaginaria, anzi addirittura a zero, in quanto deve annullarsi nell'origine. La (I) equivale pertanto alla equazione differenziale

$$(2) \qquad \zeta\frac{d\omega}{d\zeta} - p\omega = 0,$$

il cui integrale può essere posto sotto la forma $-i\mu\zeta^p$, con μ costante arbitraria. La regolarità implica che l'esponente $p(\leq 1)$ debba essere precisamente 1, e si ha, in prima approssimazione, corrispondente alle classiche onde di Airy,

$$\omega = -i\mu\zeta . \tag{3}$$

La condizione numerica

$$p = 1 , \tag{4}$$

ossia, in virtù della (II),

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi} ,$$

è appunto la celebre relazione di Airy che lega c a λ.

Qualora si supponga (e questo è sempre lecito con opportuna scelta degli assi di riferimento) che il punto $\zeta = 1$ (C della fig. 1) corrisponda a una *cresta* C del profilo ondoso (vedi fig. 2 a pag. 148), si constata che *μ deve ritenersi reale, anzi positivo*: il valore numerico rimane arbitrario, purchè soltanto piccolissimo, in conformità all'ipotesi preliminare che ω possa trattarsi come quantità di primo ordine.

3. — Cenno di precedenti ricerche.

In una memoria dei « Math. Annalen » (B. 85, 1922, volume dedicato all'Hilbert) io mi occupai dell'equazione (I), anzi dell'equazione più generale

$$\frac{d\tau}{d\sigma} - p\, e^{-3\tau} \sin \vartheta = \chi(\sigma) \quad , \quad \text{su } \mathfrak{C} ,$$

dove $\chi(\sigma)$ designa una funzione conosciuta, dimostrando, tra altro, che, per $p < 1$, la (I) non ammette soluzioni $\omega(\zeta)$, diverse da zero e abbastanza piccole, cioè in modulo inferiori ad un certo limite numerico $\varepsilon(p)$, il quale dipende essenzialmente da p, e tende a zero quando $p \longrightarrow 1$. Rimane escluso il caso in cui p sia proprio 1.

In questa condizione di cose, io avevo (come applicazione incidentale di quel mio studio) creduto di poter affermare che (se pur esistono onde della specie considerata) deve, per qualsiasi corrispondente soluzione della (I), essere esattamente $p = 1$, ossia seguitare a valere la relazione di Airy. Una tale conclusione era, in verità, affrettata, come fin da allora mi fece gentilmente osservare il sig. Weyl. Infatti è ben possibile che esistano soluzioni della (I) le quali non soddisfino alla limitazione $|\omega| < \varepsilon(p)$, eppure si mantengano in modulo abbastanza piccole da verificare la disuguaglianza fondamentale (1), in cui β è una costante prefissata, *indipendente* da p. Bisogna dunque cercare le eventuali onde permanenti, fra le soluzioni delle (I), non soltanto (come io avevo, a torto, ritenuto imprescindibile) in corrispondenza al valore $p=1$; ma, più generalmente, anche per $p<1$. Ora accade appunto che per $p=1$ nulla si trova, mentre esistono soluzioni per $p<1$ (e abbastanza prossimo all'unità). Vedremo, tra poco, come si costruiscono le soluzioni di questo secondo tipo. Dobbiamo intanto ricordare che già da parecchio tempo Stokes e poi lord Rayleigh [non in base alla (I), ma direttamente operando sulle equazioni idrodinamiche] avevano istituito determinazioni approssimative di onde permanenti, spingendo l'approssimazione fino ad un ordine abbastanza elevato: Stokes fino al secondo e Rayleigh, in due primi lavori, fino al quarto, e nell'ultimo, da lui dedicato all'argomento [1], fino al sesto. Ora, pur essendo molto dubbia la legittimità del procedimento dal punto di vista della convergenza, così che Rayleigh [2] esprimeva il desiderio che si ponesse una buona volta fuori discussione la questione esistenziale con una dimostrazione rigorosa, è pur significante il fatto che in ogni ordine di approssimazione (superiore al primo) risulta che il rapporto fra c^2 e $\dfrac{g\lambda}{2\pi}$ va crescendo coll'*altezza* a dell'onda (a partire dal valore limite 1, per a infinitesimo). Ciò implica in particolare $p<1$ e lascia ragionevolmente presumere che, se mai esistono soluzioni rigorose della (I), queste debbano piuttosto ritrovarsi per $p<1$, anzichè in corrispondenza al valore limite $p=1$.

4. — Integrazione della (I) mediante sviluppo in serie di potenze di un parametro — Espressione esplicita dei primi termini — Convergenza.

Venendo ormai all'algoritmo costruttivo, si introduce un parametro positivo μ e si cerca di soddisfare alla (I) (per qualsiasi μ) ponendo

$$\omega=\sum_{1}^{\infty}{}_n\,\omega_n(\zeta)\mu^n\,, \tag{5}$$

nonchè

$$1-p=\sum_{1}^{\infty}{}_n\,k_{2n}\mu^{2n}\,, \tag{6}$$

le $\omega_n(\zeta)$ essendo funzioni di ζ (polinomii) e le k_{2n} costanti da determinarsi in base alle condizioni del problema. È sottointeso che le serie si suppon-

[1] *On periodical irrotational waves at the surface of deap water*, Phil. Mag., vol. XXXII, 1917, pp. 381-389.

[2] Ibidem, p. 382.

gono uniformemente convergenti per $|\mu|$ abbastanza piccolo; la prima anche per $|\zeta| \leq 1$, assieme colla serie delle derivate rapporto a ζ. Come già ϑ e τ per ω, così ϑ_n e τ_n designeranno rispettivamente la parte reale e il coefficiente di i in ω_n:

(7) $$\omega_n = \vartheta_n + i\,\tau_n .$$

Cominciando dal primo termine $\mu\omega_1$ della (5), si vede subito che le (I) e (6) ne riconducono la determinazione alla (2), in cui già si sia posto $p = 1$. Ne viene, in virtù della (3),

(8) $$\omega_1 = -i\zeta .$$

Ricordato che $\omega(\zeta)$ deve per sua definizione annullarsi nell'origine, si riconosce senza difficoltà che è lecito ritenere (sostituendo, se del caso, a μ una sua opportuna funzione) $\omega - \omega_1$ divisibile per ζ^2. Ecco poi il criterio ricorrente, in base a cui si riesce ad assegnare i coefficienti successivi:

Suppongasi di aver trovato

$$\omega_\nu(\zeta) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$

nonchè ogni $k_{2\nu}$ $(k_2, k_4, \ldots)$ il cui indice sia inferiore a $n-1$, avendo constatato che ciascun $\omega_\nu(\zeta)$ è un polinomio di grado ν, divisibile per ζ^2 e dotato delle due proprietà seguenti:

a) $\omega_\nu(\zeta)$ è puramente immaginario per ζ reale;

b) $\omega_\nu(-\zeta) = (-1)^\nu\,\omega_\nu(\zeta)$.

Allora, sostituendo nella (I), per ω e p, le espressioni (5) e (6) ed eguagliando i coefficienti di μ^n nei due membri, si è condotti ad una equazione della forma

(9) $$\frac{d\tau_n}{d\sigma} - \vartheta_n = \chi_n(\sigma) - k_{n-1}\sin\sigma , \quad \text{su } \mathfrak{C} ,$$

dove $\chi_n(\sigma)$ è una combinazione polinomiale delle $\vartheta_\nu, \tau_\nu, k_{2\nu}$ già trovate e va quindi ritenuta funzione nota di σ; $k_{n-1} = 0$ per n pari, ed è invece la prima delle $k_{2\nu}$ incognite per n dispari.

La natura della (I) e le proprietà delle $\omega_\nu(\zeta)$ già assegnate $(\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ consentono più precisamente di constatare che $\chi_n(\sigma)$ si riduce ad un polinomio di grado n in $\cos\sigma$, $\sin\sigma$, il cui sviluppo di Fourier ha la forma

$$\chi_n(\sigma) = \sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}{}_{\nu}\; q_{n/n-2\nu}\sin(n-2\nu)\sigma ,$$

le q designando costanti (note) e $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ il massimo intero contenuto in $\dfrac{n}{2}$. Giova scrivere a parte l'ultimo termine del sommatorio, corrispondente a $\nu = \left[\frac{n}{2}\right]$. Esso è identicamente nullo per n pari, e per n dispari vale $q_{n/1} \sin \sigma$. Convenendo di assumere $q_{n/1} = 0$ per n pari, possiamo scrivere in ogni caso la (9) sotto la forma

$$(9') \qquad \frac{d\tau_n}{d\sigma} - \vartheta_n = \sum_{1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1} q_{n/n-2\nu} \sin (n-2\nu)\sigma + (q_{n/1} - k_{n-1}) \sin \sigma \,,$$

con che, si noti bene, il sommatorio rimane sempre esente da termini in $\sin \sigma$.

Ciò posto, ove si tenga conto che le incognite ϑ_n e τ_n sono, per ipotesi, funzioni coniugate, sviluppabili su $\mathfrak{C}$ in serie di Fourier [trattabili come somme; e senza termini costanti, nè termini in $\cos \sigma$, $\sin \sigma$, in quanto $\omega_n(\zeta)$ contiene ζ^2 a fattore], si riconosce per materiale identificazione dei due membri della (9'):

1°) che $k_{n-1} = q_{n/1}$, il che si riduce ad una identità per n dispari, e per n pari determina k_{n-1};

2°) che [attraverso $\vartheta_n(\sigma)$, $\tau_n(\sigma)$] resta univocamente individuata la funzione $\omega_n(\zeta)$, la quale si riduce ad un polinomio di grado n, divisibile per ζ^2 e soddisfacente alle due proprietà a) e b) (per $\nu = n$).

Con ciò rimane perfettamente giustificato il nostro criterio ricorrente, e l'algoritmo costruttivo dei polinomii $\omega_n(\zeta)$ e delle costanti k_{2n} risulta illimitatamente applicabile a partire da $n = 2$, essendo ω_1 fornito dalla (8).

Il calcolo numerico dei primi termini dà

$$(10) \quad \begin{cases} \omega_1 = -i\zeta \,;\; \omega_2 = -i\,{}^3/_2\,\zeta^2 \,;\; \omega_3 = -i\,{}^{17}/_6\,\zeta^3 \,,\; k_2 = 1 \,; \\ \omega_4 = -i\{{}^{71}/_{12}\,\zeta^4 + \zeta^2\} \,;\; \omega_5 = -i\{(13 + {}^3/_{40})\,\zeta^5 + {}^{15}/_4\,\zeta^3\} \,,\; k_4 = {}^5/_2 \,;\cdots, \end{cases}$$

con che in particolare si ha dalla (6)

$$(6') \qquad p = 1 - \mu^2 - {}^5/_2\,\mu^4 - ⑥ ,$$

designandosi genericamente con ⓝ un termine d'ordine n (almeno) in μ.

Naturalmente, oltre alla illimitata applicabilità dell'algoritmo, è essenziale di verificarne la convergenza. Rimandando, per la dimostrazione, alla memoria che, come avvertii da principio, sta per essere pubblicata nei Math. Ann., mi limiterò ad accennare che l'uniforme convergenza delle serie (5) e (6) si stabilisce per confronto con opportune maggioranti, previa una estensione della nozione di maggiorante forse non priva di interesse, anche indipendentemente dalla applicazione specifica di cui si tratta.

5. — Profilo dell'onda — Relazioni fra elementi caratteristici del moto ondoso.

Nota $\omega(\zeta)$, rimangono senz'altro individuati gli elementi salienti del fenomeno meccanico. Così per es. il fatto che $\omega(\zeta)$ risulta puramente immaginaria per ζ reale si traduce in una proprietà di simmetria (geometrica e cinematica) rispetto alla verticale Cy d'ogni cresta d'onda C (cfr. fig. 2).

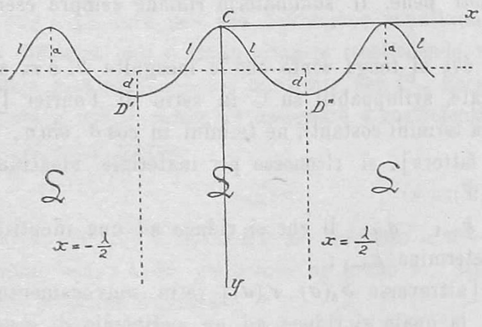

Fig. 2.

Per la linea libera l, cioè per il profilo superiore dell'onda, si ricava la rappresentazione parametrica

$$z_l = x_l + i\,y_l = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\sigma e^{i\omega}\,d\sigma\,,$$

la $\omega(\zeta)$ sotto il segno riferendosi, ben si intende, alla circonferenza $\mathfrak{C}$ ($\zeta = e^{i\sigma}$). Le (5) e (10) dànno in conformità

$$(11)\left\{\begin{aligned} x_l &= \frac{\lambda}{2\pi}\{\sigma + \mu\sin\sigma + \mu^2\sin 2\sigma + \mu^3\,{}^3/_2\sin 3\sigma + \\ &\quad + \mu^4({}^8/_3\sin 4\sigma + {}^1/_2\sin 2\sigma) + \mu^5(5\,,21\sin 5\sigma + \\ &\quad + {}^{19}/_{12}\sin 3\sigma) + ⑥\}\,, \\ y_l &= \frac{\lambda}{2\pi}\{\mu(1-\cos\sigma) + \mu^2(1-\cos 2\sigma) + \mu^3\,{}^3/_2(1-\cos 3\sigma) + \\ &\quad + \mu^4[{}^8/_3(1-\cos 4\sigma) + {}^1/_2(1-\cos 2\sigma)] + \\ &\quad + \mu^5[5\,,21(1-\cos 5\sigma) + {}^{19}/_{12}(1-\cos 3\sigma)] + ⑥\}\,. \end{aligned}\right.$$

E ancora: $c\,e^{-2i\omega(1)}$, $c\,e^{-2i\omega(-1)}$ rappresentano (vettorialmente, e anche in valore assoluto, perchè si tratta di numeri positivi) la velocità (relativa) minima e massima delle particelle fluide, in corrispondenza la prima ad una cresta C, la seconda ad una *sella* dell'onda (D′, D″ nella figura); l'*altezza a dell'onda* (sopraelevazione d'una cresta sul livello medio) e *la depressione d* (quota di una sella al disotto dello stesso livello) e per esse i rapporti

$$(12)\qquad \alpha = \frac{a}{\frac{1}{2\pi}\lambda}\ ,\quad \delta = \frac{d}{\frac{1}{2\pi}\lambda}\ ,$$

hanno le espressioni rispettive

$$(13)\qquad \alpha = \frac{1}{p}\frac{1}{2}(1 - e^{-2i\omega(1)})\ ,$$

$$(14)\qquad \delta = \frac{1}{p}\frac{1}{2}(e^{2i\omega(-1)} - 1)\ ,$$

ossia, sviluppando in serie di potenze di μ, a norma delle (5), (10) e (6′):

$$(13')\qquad \alpha = \mu\{1 + {}^1/_2\,\mu + {}^3/_2\,\mu^2 + {}^{13}/_6\,\mu^3 + (6 + {}^{19}/_{24})\,\mu^4 + ⑤\}\ ,$$

$$(14')\qquad \delta = \mu\{1 - {}^1/_2\,\mu + {}^3/_2\,\mu^2 - {}^{13}/_6\,\mu^3 + (6 + {}^{19}/_{24})\,\mu^4 + ⑤\}\ .$$

Come si vede, per μ abbastanza piccolo, $\alpha > \delta$, ossia *l'altezza a delle creste al disopra del livello medio supera la depressione d delle selle al disotto dello stesso livello.*

La eliminazione del parametro ausiliario μ fra le (6′), (13′) e (14′) dà luogo a due relazioni fra α, δ e p, le quali [attese le definizioni (12) e (II) di questi rapporti] involgono unicamente elementi caratteristici (geometrici e cinematici) del moto ondoso. Per esplicitare queste relazioni, si può per es. ricavare dalla (13′) μ in termini di α, e sostituire in

$$\alpha - \delta = \mu^2\{1 + {}^{13}/_3\,\mu^2 + ④\}\ ,$$

nonchè nella espressione (6′) di p, che procedono entrambe per potenze pari di μ. Si ha così

$$(15)\qquad \delta = \alpha - \alpha^2 + \alpha^3 - {}^{31}/_{12}\,\alpha^4 + {}^{23}/_4\,\alpha^5 + ⑥\ ,$$

$$(16)\qquad p = \frac{g\lambda}{2\pi c^2} = 1 - \alpha^2 + \alpha^3 - {}^3/_4\,\alpha^4 + {}^{25}/_{12}\,\alpha^5 + ⑥\ ,$$

la quale, invertendo, può anche essere scritta

$$(16')\qquad \frac{1}{p} = \frac{2\pi c^2}{g\lambda} = 1 + \alpha^2 - \alpha^3 + {}^7/_4\,\alpha^4 - {}^{49}/_{12}\,\alpha^5 + ⑥\ .$$

Quest'ultima relazione, arrestata al secondo ordine, dà

$$c^2 = \frac{g\lambda}{2\pi}(1 + \alpha^2)\ ,$$

risultato di seconda approssimazione, che risale a Stokes.

Lord Rayleigh, nella memoria citata al n. 3, introdusse ipotesi preventive sull'ordine di grandezza di certi coefficienti $\beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, e, in base a tali ipotesi, spinse il suo calcolo fino al 6° ordine. Per il confronto colle nostre formule, bisognerebbe prima di tutto verificare in modo preciso che le ipotesi suddette si accordano effettivamente cogli ordini di grandezza risultanti dal teorema di esistenza. Va comunque rilevato che se, anche senza precisare l'ordine di grandezza dei coefficienti $\gamma, \delta, \varepsilon$ del Rayleigh, si ammette unicamente che siano d'ordine superiore al suo β, si ha un controllo per il nostro calcolo numerico, potendosi constatare (fatte le debite riduzioni e sostituzioni) che dalle formule del Rayleigh seguono relazioni, fra gli elementi caratteristici, coincidenti colle precedenti fino al 5° ordine incluso.

Noterò infine che la discussione concernente l'ordine di grandezza di quei tali coefficienti presenterebbe interesse, non soltanto, dirò così, storico-critico, ma anche algoritmico, poichè il procedimento del Rayleigh, pur essendo meno sistematico, riesce, all'atto pratico, alquanto più spedito, almeno pel calcolo dei primi termini.

Botanica. — *Osservazioni sul meccanismo di divisione della cellula madre del sacco embrionale nelle piante apogame.* Nota del Corrisp. E. Carano [1].

I numerosi contributi finora apportati allo studio dell'apogamia nelle Angiosperme sono, specialmente dal punto di vista citologico, di un grande interesse, in quanto ci mostrano che l'importante processo può essere al microscopio non solo controllato ma anche svelato, com'è avvenuto per parecchie piante apogame, la cui caratteristica ci è stata messa in evidenza, prima che dall'osservazione in natura e dall'esperimento, dallo studio citologico accurato. Non è quindi ingiustificata la speranza di poter risalire mediante l'esatta conoscenza del meccanismo citologico dell'apogamia alle cause che la determinano ed anche al modo di provocarla sperimentalmente [2].

Tempo addietro anch'io illustrai in *Erigeron Karwinskianus* var. *mucronatus* un caso di apogamia parziale, avendo osservato nella medesima calatide sacchi embrionali con oosfera diploide e sacchi embrionali con oosfera

[1] Pervenuta all'Accademia il 9 agosto 1924.

[2] Per citare uno degli esempi più recenti, è capitato al Ljungdahl, nelle sue esperienze d'ibridazione sui Papaveri, di osservare nella produzione del polline di uno degli ibridi, fenomeni perfettamente corrispondenti a quelli illustrati dal Rosenberg in alcune specie apogame del sottogen. *Archieracium* (*Zur Zytologie der Gattung Papaver*. Sv. Bot. Tidskr., Bd. 16, 1922, pag. 108).