ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

NOTE PRESENTATE DA SOCI.

Matematica. — *Studio di problemi ai limiti sull'equazione* $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = f(x, y, z, p, q, r, s, t)$, *e sull'equazione* $\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_n \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_{n-1} \frac{\partial}{\partial y}\right) \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial z}{\partial y}\right) = F(x, y)$. Nota del dott. BONAPARTE COLOMBO, presentata dal Corrispondente GUIDO FUBINI [1].

Considero l'equazione alle derivate parziali del terzo ordine in due variabili indipendenti x, y

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = f(x, y, z, p, q, r, s, t), \tag{1}$$

le cui caratteristiche fisse sul piano xy sono ripartite nei tre sistemi di rette di coefficienti angolari $0, 1, \infty$; e, ponendomi dal punto di vista delle funzioni reali di variabili reali, studio su di essa il seguente problema di Goursat generalizzato: ricercarne un integrale il quale su due caratteristiche, che ritengo senz'altro siano i due assi coordinati, e su una linea regolare $y = y(x)$, passante per l'origine O ed incontrata da ogni caratteristica in non più di un punto, assuma valori prefissati (in modo compatibile in O).

Seguendo un metodo ormai classico, incomincio ad indagare siffatto problema sull'equazione

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = F(x, y); \tag{2}$$

faccio l'ipotesi che la funzione $F(x, y)$ sia definita in un esagono non regolare E, che chiamo di parametro τ, avente come vertici i punti $(\tau, 0)$, (τ, τ), $(0, \tau)$, $(-\tau, 0)$, $(-\tau, -\tau)$, $(0, -\tau)$, e perciò come tre coppie di lati opposti delle caratteristiche dei tre diversi sistemi, e che inoltre sia regolare in esso ed in particolare soddisfi alla condizione $|F(x, y)| < L$, con L costante positiva. Le funzioni iniziali s'intenderanno assegnate proprio nell'interno di E.

L'integrale generale della (2) è

$$z(x, y) = \varphi_1(x) + \varphi_2(y) + \varphi_3(x - y) + \Theta(x, y), \tag{3}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 24 luglio 1924.

in cui $\varphi_1 , \varphi_2 , \varphi_3$ sono simboli di funzioni arbitrarie, e

$$\Theta(x, y) = \int_0^x d\xi \int_0^y d\eta \int_0^\xi \mathrm{F}(t, t + \eta - \xi)\, dt$$

ne è una soluzione particolare.

Supponendo senz'altro nulli i dati iniziali (caso a cui, del resto, ci si riduce subito con un cambiamento di funzione incognita), l'eventuale integrale richiesto è

$$z(x, y) = \varphi(x) + \varphi(-y) - \varphi(x - y) + \Theta(x, y), \tag{4}$$

la φ soddisfacendo all'equazione funzionale

$$\varphi(x) + \varphi[-y(x)] - \varphi[x - y(x)] = \Phi(x) \tag{5}$$

in cui si è posto $\Phi(x) = -\Theta[x, y(x)]$, sicchè $\Phi(x)$ riesce definita nell'intervallo in cui varia x per fornire tutti i punti del segmento considerato della curva $y = y(x)$.

Studio la precedente equazione funzionale (5) applicando il metodo delle successive approssimazioni, e precisamente risolvendo rispetto al termine $\varphi(x)$, oppure $\varphi[-y(x)]$, oppure $\varphi[x - y(x)]$, secondo che, come deve avvenire per le ipotesi fatte sulla curva $y = y(x)$, la $y'(x)$ è costantemente compresa fra 0 ed 1 (estremi esclusi), oppure finita e maggiore di 1, oppure negativa, finita e non nulla; e dimostro, stabilite alcune opportune disuguaglianze, che la (5) ammette effettivamente una soluzione φ, definita nell'intervallo da $-\tau$ a τ, la quale soddisfa alle condizioni

$$|\varphi(x)| < \mathrm{LM}|x|^3, \quad |\varphi'(x)| < \mathrm{LM}|x|^2, \quad |\varphi''(x)| < \mathrm{LM}|x|,$$

la costante positiva M dipendendo dalla $y = y(x)$, ed inoltre, sempre per la supposta regolarità di F, possiede derivata terza finita. Dimostro anche l'unicità della soluzione φ di (5) che soddisfi alla condizione $|\varphi(x)| < \mathrm{N}|x|^2$ (N costante positiva), la quale d'altra parte non menoma la generalità della soluzione del problema considerato, in quanto la condizione $\varphi(0) = 0$ segue dalla (5) stessa, la condizione $\varphi'(0) = 0$ non fa che precisare una fra le soluzioni $\varphi(x) + cx$ di (5), ottenute da una soluzione $\varphi(x)$ variando la costante c, che tutte conducono allo stesso integrale (4) ed infine la condizione che $\varphi'(x)$ sia Lipschitziana è certo necessaria affinchè la (4) possa verificare la (2).

Posso concludere:

« Esiste ed è unica nell'interno dell'esagono E, in cui la $\mathrm{F}(x, y)$ « si suppone definita e regolare, una soluzione della (2), la quale si annulli « sui due assi coordinati e su una curva regolare passante per l'origine ed « incontrata da ogni caratteristica in non più di un punto ».

Imitando poi un metodo usato dal Goursat ([1]), estendo il risultato alla equazione (1) sotto opportune ipotesi per la f, e, abbandonando l'ipotesi dei dati iniziali nulli, enuncio il seguente teorema finale:

« Esiste ed è unica una soluzione di (1) che sui due assi e su una « curva regolare passante per l'origine, ed incontrata da ogni caratteristica « in non più di un punto, si riduca a tre funzioni assegnate (in modo com- « patibile in O), purchè la f sia definita e regolare quando il punto x, y « appartiene ad un esagono E di parametro τ, e le altre variabili $z, p \dots t$ « verificano le disuguaglianze $|z - a_1| < Z$, $|p - a_2| < P \dots$, $|t - a_6| < T$, « essendo $Z, P \dots T$ delle costanti positive ed $a_1 a_2 \dots a_6$ l'elemento di secondo « ordine di centro l'origine definito dai dati iniziali, e purchè la f sia Lip- « schitziana in questo campo rispetto alle $z, p \dots t$ ».

Questa volta però l'esistenza della soluzione è assicurata non in tutto l'esagono di parametro τ, entro cui sono assegnati i dati iniziali, ma soltanto in un esagono di parametro sufficientemente piccolo.

Avverto che il problema consistente nell'assegnare i valori dell'integrale sulle tre caratteristiche passanti per O, e che posso chiamare problema di Goursat relativo alle caratteristiche, è eccezionale, e precisamente in generale impossibile e, se possibile, indeterminato. Infatti, un eventuale integrale della (2), nullo sui due assi e che sulla retta $y = x$ si riduca ad una funzione assegnata $\alpha(x)$, è dato dalla (4), in cui la φ si annulli per il valore 0 della variabile e soddisfi all'equazione funzionale

$$(6) \qquad \varphi(x) + \varphi(-x) = \Phi(x) + \alpha(x),$$

essendo ora $\Phi(x) = -\Theta(x, x)$.

La (6) ammette la soluzione richiesta, soltanto quando è $\alpha(0) = 0$ e $\Phi(x) + \alpha(x)$ è una funzione pari [segue pure $\alpha'(0) = 0$]: ed in queste ipotesi ammette le infinite soluzioni $\varphi(x) = \frac{1}{2}[\Phi(x) + \alpha(x) + \beta(x)]$, $\beta(x)$ indicando una funzione dispari arbitraria. Dimostro che si può determinare in modo unico la β imponendo che sulla $y = x$ la derivata dell'integrale (4) nella direzione normale, a cui corrispondono i coseni $\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$, si riduca ancora ad una funzione $\alpha_1(x)$ tale che $\alpha_1(0) = 0$, e che, moltiplicata per $\sqrt{2}$ e diminuita poi di $\frac{\partial\Theta}{\partial x}(x, x) - \frac{\partial\Theta}{\partial y}(x, x)$, dia una funzione pari ([2]); il suo integrale calcolato fra 0 ed x fornisce appunto la $\beta(x)$.

([1]) Goursat, *Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre*. Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, II^e série, *6*, 1904, p. 117.

([2]) Perciò, se nella (2) è in particolare $F(x, y) = 0$, esiste ed è unica in E una soluzione, la quale sia nulla sui due assi e sulla $y = x$ si riduca, insieme colla derivata normale, a due funzioni pari, nulle per il valore 0 della variabile.

Osservo che la β si può determinare in modo unico anche coll'imporre delle altre condizioni; ad esempio, che su uno dei due assi la derivata normale dell'integrale sia una funzione conveniente, chiamando appunto « conveniente » una funzione non completamente arbitraria, con cui riesca risolubile un'equazione funzionale sotto certe condizioni per la funzione incognita.

Con questa convenzione concludo:

« Esiste ed è unica in E una soluzione della (2), la quale sui due « assi assuma valori prefissati arbitrariamente e che inoltre sulla terza ca- « ratteristica passante per O si riduca ad una funzione conveniente, mentre « su una delle tre caratteristiche la sua derivata normale si riduce ad un'altra « funzione conveniente (ammessa naturalmente la compatibilità dei dati ini- « ziali nell'origine) ».

In sostanza il problema riscontrato eccezionale ammette ancora una ed una sola soluzione, quando venga modificato nel senso di sostituire l'arbitrio completo di una funzione (che fornisce i valori dell'integrale sulla terza caratteristica) coll'arbitrio non completo di due funzioni (che forniscono, ad esempio, i valori sulla terza caratteristica dell'integrale e della sua derivata normale).

Il precedente risultato mi spinge ad indagare il problema di Goursat relativo alle caratteristiche, consistente adunque nel prefissare i valori dell'integrale su tutte le caratteristiche passanti per O, più in generale sopra l'equazione

$$(7)\quad \left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_n\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_{n-1}\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\mathrm{F}(x,y),$$

le λ essendo delle costanti reali, tutte differenti. I suoi n sistemi di caratteristiche sono costituiti dalle rette di coefficienti angolari $\lambda_1\,\lambda_2\ldots\lambda_n$, ed il suo integrale generale è

$$(8)\quad z(x,y)=\varphi_1(y-\lambda_1x)+\varphi_2(y-\lambda_2x)+\cdots+\varphi_n(y-\lambda_nx)+\Theta(x,y),$$

le φ essendo delle funzioni arbitrarie e $\Theta(x,y)$ essendo ora un integrale particolare della (7); la (8) mette bene in evidenza la forma del campo di esistenza della $z(x,y)$.

Rimanendo, per semplicità, nell'àmbito delle funzioni analitiche, sono allora condotto a stabilire un sistema di n equazioni di primo grado negli n coefficienti delle potenze i^{me} della variabile (i numero intero ≥ 1) negli sviluppi in serie delle φ; il corrispondente determinante dei coefficienti è

$$(9)\quad \varDelta_i=\begin{vmatrix} 0 & (\lambda_1-\lambda_2)^i & (\lambda_1-\lambda_3)^i & \ldots\ldots & (\lambda_1-\lambda_n)^i \\ (\lambda_2-\lambda_1)^i & 0 & (\lambda_2-\lambda_3)^i & \ldots\ldots & (\lambda_2-\lambda_n)^i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ (\lambda_n-\lambda_1)^i & (\lambda_n-\lambda_2)^i & (\lambda_n-\lambda_3)^i & \ldots\ldots & 0 \end{vmatrix}$$

formato colle potenze i^{me} delle differenze delle λ. La discussione del problema considerato è ricondotta alla discussione di Δ_i, il quale, avendo le λ dei valori fissi, è da riguardarsi come funzione soltanto di i che varia per valori interi da 1 ad ∞ e di cui è una trascendente intera: precisamente si tratta di accertare quando Δ_i è nullo e quando no; o, più in generale, di stabilirne la caratteristica; se questa è sempre eguale ad n, il problema è risolubile ed in modo unico.

Se i è pari, il determinante (9) è simmetrico; e se i è dispari, è emisimmetrico; e poichè ogni determinante emisimmetrico di ordine dispari è nullo, si perviene subito a questo primo risultato:

« Se n è dispari, il problema di Goursat relativo alle caratteristiche, « posto per la (7) (nel campo analitico), in generale non ha soluzioni, e, « ove ne ammetta una (i dati iniziali soddisfacendo ad opportune condizioni), « ne ammette infinite ».

Riservandomi di studiare in modo completo il determinante Δ_i, per ora ne enuncio le seguenti proprietà:

« Se Δ_i non si annulla per ogni i pari (dispari), si annulla soltanto « per un numero finito di i pari (dispari).

« Il limite di Δ_i per $i \rightarrow \infty$ può essere eguale a 0 (per infiniti va- « lori delle λ).

« Δ_i è identicamente nullo, qualunque siano le λ, per $i < n-1$; « e la sua caratteristica vale allora, al più, $i+1$ ».

Di qui emerge che, se Δ_i non si annulla per ogni i pari (dispari), le condizioni di possibilità perchè il problema sia risolubile, da imporsi ai coefficienti degli sviluppi in serie delle funzioni assegnate inizialmente, sono certo in numero finito. I valori di i minori di $n-1$ conducono a condizioni di possibilità, interpretabili geometricamente, ed anche il valore *zero* di i, che pur comparisce in un modo speciale, conduce alla condizione ovvia che le funzioni iniziali assumano in O lo stesso valore; ma si può dimostrare che dall'essere soddisfatte queste condizioni non deriva tuttavia alcuna indeterminazione per l'integrale cercato.

Per $n=1$ ed $n=2$ si ritrovano dei risultati notissimi. Per $n=3$ si trovano dei risultati che, per quanto ora valgano soltanto nel campo analitico, coincidono con quelli già da me esposti, quando si identifichi la (7) colla (2). Per il caso, non ancora trattato, di $n=4$, Δ_i non si annulla per nessun valore intero positivo finito di i, salvo che per $i=1$ ed $i=2$; se le λ sono tali che esso non si annulli nemmeno all'∞, si conclude, poichè le serie che forniscono le φ convergono, che il problema in questione è certo risolubile in modo unico, quando siano soddisfatte le condizioni di possibilità corrispondenti ai valori 0, 1, 2 di i.