ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

divisioni maturative, si separano alcune sostanze nucleari, con caratteri diversi dalla cromatina, che potrebbero avere relazione con l'emissione del filamento sopra descritto [1]. Pur non potendo dare un giudizio esauriente sopra un argomento già tanto controverso, per le difficoltà di tecnica e d'interpretazione, è però ben certo che in *Cryptochilum echini* l'emissione di una parte di sostanza nucleare, sotto forma di filo, è *soltanto un attributo del micronucleo globuliforme, che ha assunto la funzione sessuale,* perchè da esso solo hanno origine i micronuclei degli *individui misti* e degli *individui gametici.*

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul parallelismo di Levi-Civita per una superficie dello spazio ordinario.* Nota di FRANCESCO SBRANA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [2].

1. Nella teoria del parallelismo di Levi-Civita, il problema del trasporto per parallelismo sopra una superficie dello spazio ordinario si presenta come un caso particolare assai semplice [3]. Tuttavia non ci sembra superfluo di osservare che si può, con una quadratura, pervenire agevolmente alla risoluzione di questo problema, e dedurre, come immediata conseguenza, la nota relazione tra parallelismo e curvatura.

2. Ricordiamo anzitutto che, se $\mathbf{u}$ è il versore tangente in un punto P alla superficie, del quale si cerca la parallela tangenziale lungo una determinata curva, ed s è l'arco della curva stessa, $\frac{d\mathbf{u}}{ds}$, o, più brevemente, $\dot{\mathbf{u}}$, deve risultare normale alla superficie.

Fissato, sulla superficie, un sistema di coordinate curvilinee x_1, x_2, poniamo

$$\mathbf{u} = \mathbf{t}_1 u_1 + \mathbf{t}_2 u_2 , \tag{1}$$

con

$$\mathbf{t}_1 = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial P}{\partial x_1} , \quad \mathbf{t}_2 = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial P}{\partial x_2} , \tag{2}$$

[1] Fra i molti lavori, che trattano direttamente o indirettamente l'argomento, si consulti: P. Büchner, *Das accessorische Chromosom in Spermatogenese und Ovogenese der Orthopteren, zugleich ein Beitrag zur Kenntnis der Reduktion,* Archiv f. Zellforschung, Bd. III, 1909, pag. 335, ed alcuni di quelli citati nella Bibliografia di questo stesso lavoro.

[2] Pervenuta all'Accademia il 18 settembre 1924.

[3] Cfr. T. Levi-Civita, *Questioni di meccanica classica e relativistica,* Bologna, Zanichelli, pp. 97–143.

E e G avendo il significato generalmente a loro attribuito; $\mathbf{t}_1$ e $\mathbf{t}_2$ rappresentano perciò i due versori tangenti in P rispettivamente alle linee $x_2 =$ costante , $x_1 =$ costante. Dall'uguaglianza

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{t}_1 \dot{u}_1 + \mathbf{t}_2 \dot{u}_2 + \dot{\mathbf{t}}_1 u_1 + \dot{\mathbf{t}}_2 u_2 , \tag{3}$$

moltiplicando scalarmente per t_1, e designando con θ l'angolo in P tra le due linee coordinate, segue

$$\dot{u}_1 + \dot{u}_2 \cos\theta + (\mathbf{t}_1 \times \dot{\mathbf{t}}_2)\, u_2 = 0 . \tag{4}$$

In quest'ultima equazione è agevole far comparire come unica funzione incognita l'angolo α che $\mathbf{u}$ forma con $\mathbf{t}_1$; si ha, infatti,

$$u_1 = \frac{\operatorname{sen}(\theta - \alpha)}{\operatorname{sen}\theta} , \quad u_2 = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\theta},$$

e quindi, con facile calcolo,

$$\dot{\alpha} = \dot{\theta} + \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} (\mathbf{t}_1 \times \dot{\mathbf{t}}_2) ,$$

o, più semplicemente,

$$\dot{\alpha} = - \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} (\dot{\mathbf{t}}_1 \times \mathbf{t}_2) \text{ (1)} . \tag{5}$$

A quest'ultima equazione si perverrebbe pure, com'è naturale, se si moltiplicasse scalarmente la (3) per $\mathbf{t}_2$, anzichè per $\mathbf{t}_1$.

Dalla (5), integrando, segue

$$\alpha - \alpha_0 = - \int_{s_0}^{s} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \dot{\mathbf{t}}_1 \times \mathbf{t}_2 \right) ds ,$$

dove s_0 ed α_0 sono due costanti, di cui è ben chiaro il significato.

3. In particolare, in corrispondenza di un ciclo T, si ha

$$\alpha - \alpha_0 = - \int_{T} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} d\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2 \right),$$

ovvero, trasformando al modo solito l'integrale al secondo membro in integrale superficiale, esteso alla porzione σ di superficie che ha per contorno T,

$$\alpha - \alpha_0 = \iint_{\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_1} \times \mathbf{t}_2 \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_2} \times \mathbf{t}_2 \right) \right\} dx_1\, dx_2 .$$

L'area della porzione di superficie considerata è data, notoriamente, dall'integrale

$$\iint_{\sigma} \sqrt{EG} \operatorname{sen}\theta\, dx_1\, dx_2 .$$

(1) Poichè $\mathbf{t} \times \mathbf{t}_2 = \cos\theta$, derivando si ottiene appunto

$$\mathbf{t}_1 \times \dot{\mathbf{t}}_2 = - \dot{\mathbf{t}}_1 \times \mathbf{t}_2 - \dot{\theta} \operatorname{sen}\theta .$$

Si ha perciò

$$\frac{d\alpha}{d\sigma}=\frac{1}{\sqrt{EG}\,\mathrm{sen}\,\theta}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_1}\times \mathbf{t}_2\right)-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{\mathrm{sen}\,\theta}\frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_2}\times \mathbf{t}_2\right)\right\}.$$

Per identificare il secondo membro colla curvatura gaussiana della superficie, basta osservare che (¹)

$$\frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_1}\times \mathbf{t}_2=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(2\frac{\partial F}{\partial x_1}-\frac{\partial E}{\partial x_2}-\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial x_1}\right),$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_2}\times \mathbf{t}_2=\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}-\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial x_2}\right).$$

Si ritrova così una nota espressione della detta curvatura (²).

Meccanica. — *Sui moti stazionarî nella dinamica elettronica.* Nota di Umberto Crudeli, presentata dal Socio T. Levi-Civita (³).

In un rapporto al Congrès Solvay del 1921 (⁴), Niels Bohr osserva: « Nous sommes tout naturellement conduits à admettre — hypothèse qui actuellement est à la base de toutes les applications atomiques — qu' il est possible, à un haut degré d'approximation, de décrire le mouvement des particules, dans les états stationnaires d'un système atomique, comme celui de points-masses se mouvant sous l'influence de leurs répulsions et attractions mutuelles dûes à leurs charges électriques ».

Cotesto è tuttora il punto di vista che domina il campo della dinamica dei modelli molecolari, degli atomici e dei nucleari, sebbene alle prime costruzioni basate sulle ipotesi di Rutherford-Bohr (costruzioni naturalmente di tipo semplice, ma che tuttavia hanno reso grande utile alla fisica) siano seguìte anche costruzioni diversamente basate (concernenti, esse pure, l'intima struttura della materia) (⁵). Alle concrete argomentazioni, con le quali il

(¹) Si tengano presenti, oltre le (2), le uguaglianze

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x_1}\right)^2=E\,,\quad \frac{\partial P}{\partial x_1}\times\frac{\partial P}{\partial x_2}=F\,,\quad \left(\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)^2=G\,,$$

e quelle che se ne ottengono derivando rapporto a x_1 e x_2.

(²) Cfr. L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, 1902, pag. 93, (17).

(³) Pervenuta all'Accademia il 26 settembre 1924.

(⁴) Vedasi in *Atomes et électrons* (Paris, Gauthier-Villars, 1923; pag. 232).

(⁵) Vedansi le conferenze del Bohr intitolate *Les spectres et la structure de l'atome* (Paris, Hermann, 1923; pag. 89) ed un articolo del Lewis, *Atomic structure and quantisation*, comparso nella rivista « Scientia » (fasc. II) dell'anno in corso.