# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA NAZIONALE

## DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

---

SERIE QUINTA

---

# RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXXIII.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

## NOTE PRESENTATE DA SOCI.

**Matematica.** — *Ancora sulla risoluzione numerica delle equazioni integrali di Fredholm.* Nota di FRANCESCO TRICOMI, presentata dal Socio CASTELNUOVO [1].

**4.** Cerchiamo ora, analogamente a quel che si è fatto [2] per la funzione $D(\lambda)$, di assegnare un limite superiore del valor assoluto della differenza $\Delta(x,y\,|\,\lambda) - \Delta^*(x,y\,|\,\lambda)$, essendo $\Delta^*$ la funzione $\Delta$ relativa al nucleo approssimato $K^*$.

A tal uopo osserviamo che, essendo per definizione

$$\Delta(x,y\,|\,\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 K\begin{pmatrix}x\,,z_1\,,z_2\,,\dots z_n\\ y\,,z_1\,,z_2\,,\dots z_n\end{pmatrix}dz_1\,dz_2\dots dz_n\,,$$

si avrà

$$\Delta - \Delta^* = -\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\times$$

$$\times\int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1\left[K\begin{pmatrix}x\,,z_1\,,z_2\,,\dots z_n\\ y\,,z_1\,,z_2\,,\dots z_n\end{pmatrix} - K^*\begin{pmatrix}x\,,z_1\,,z_2\,,\dots z_n\\ y\,,z_1\,,z_2\,,\dots z_n\end{pmatrix}\right]dz_1\,dz_2\dots dz_n\,,$$

da cui, prendendo il valor assoluto di entrambi i membri e applicando il lemma del § 2 alla differenza dei due determinanti di Fredholm di ordine $n+1$, si trae

$$|\Delta - \Delta^*| < \sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^n}{n!}(n+1)^{\frac{n+1}{2}}[(N+\varepsilon)^{n+1} - N^{n+1}]\,,$$

od anche, cambiando $n$ in $n-1$,

$$|\Delta - \Delta^*| < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^{n-1}}{(n-1)!}n^{\frac{n}{2}}[(N+\varepsilon)^n - N^n]\,. \tag{11}$$

Anche il risultato ora ottenuto è suscettibile di essere semplicemente espresso mediante la trascendente $\Omega$ introdotta nel § precedente. Invero, derivando ambo i membri della (10) rispetto ad $x$, si ha

$$\Omega'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{n}{2}}}{(n-1)!}x^{n-1}\,;$$

di guisa che la (11) può scriversi, analogamente alla (9), sotto la forma

$$\left|\Delta(x,y\,|\,\lambda) - \Delta^*(x,y\,|\,\lambda)\right| < (N+\varepsilon)\,\Omega'[|\lambda|(N+\varepsilon)] - N\,\Omega'[|\lambda|N]. \tag{12}$$

[1] Pervenuta all'Accademia il giorno 24 giugno 1924.

[2] Ved. la Nota dallo stesso titolo pubblicata in questi Rendiconti, vol. XXXIII, 1° sem., pag. 483.

**5.** Premessi questi calcoli preliminari, ricordiamo che, supposte $D(\lambda)$ e $D^*(\lambda)$ non nulle, si ha

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) - \frac{\lambda}{D(\lambda)}\int_0^1 \Delta(x\,,y\,|\,\lambda)\, f(y)\, dy \\ \varphi^*(x) &= f(x) - \frac{\lambda}{D^*(\lambda)}\int_0^1 \Delta^*(x\,,y\,|\,\lambda)\, f(y)\, dy\,, \end{aligned}\right.$$

da cui, sottraendo membro a membro e passando ai valori assoluti, si trae

$$(13)\qquad |\varphi(x) - \varphi^*(x)| \leq |\lambda| \int_0^1 \left| \frac{\Delta(x\,,y\,|\,\lambda)}{D(\lambda)} - \frac{\Delta^*(x\,,y\,|\,\lambda)}{D^*(\lambda)} \right| |f(y)|\, dy\,.$$

Ciò posto, osserviamo:

1°) che si ha identicamente

$$\frac{\Delta(x\,,y\,|\,\lambda)}{D(\lambda)} - \frac{\Delta^*(x\,,y\,|\,\lambda)}{D^*(\lambda)} =$$

$$= \frac{\Delta(x\,.y|\lambda)\,[D^*(\lambda) - D(\lambda)] + D(\lambda)\,[\Delta(x\,,y\,|\,\lambda) - \Delta^*(x\,,y\,|\,\lambda)]}{D(\lambda)\,D^*(\lambda)}\,;$$

2°) che, con calcoli perfettamente analoghi a quelli che ci hanno condotti alla (9) e alla (12), si ottiene facilmente

$$(14)\qquad |D(\lambda)| < \Omega[\,|\lambda|\,N] \quad , \quad |\Delta(x\,,y|\lambda)| < N\,\Omega'[\,|\lambda|\,N]\,.$$

Pertanto, indicati per un momento con $\delta D$ e $\delta\Delta$ i secondi membri della (9) e della (12), potremo porre

$$\left| \frac{\Delta(x\,,y\,|\,\lambda)}{D(\lambda)} - \frac{\Delta^*(x\,.y\,|\,\lambda)}{D^*(\lambda)} \right| < \frac{N\,\Omega'[\,|\lambda|\,N]\,\delta D + \Omega[\,|\lambda|\,N]\,\delta\Delta}{|D(\lambda)|\;|D^*(\lambda)|}\,,$$

da cui, sostituendo nella (13), si ricava

$$(15)\qquad |\varphi(x) - \varphi^*(x)| < |\lambda|\; F\, \frac{N\,\Omega'[\,|\lambda|\,N]\,\delta D + \Omega[\,|\lambda|\,N]\,\delta\Delta}{|D(\lambda)|\,|D^*(\lambda)|}\,,$$

avendo indicato con F un limite superiore di $|f(x)|$ nell'intervallo $(0\,,1)$.

Per semplificare il risultato ottenuto, notiamo che, essendo evidentemente $\Omega$ e tutte le sue derivate delle funzioni crescenti (alla destra dell'origine si ha

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta D &= \Omega[\,|\lambda|\,(N+\varepsilon)] - \Omega[\,|\lambda|\,N] < \varepsilon\,|\lambda|\,\Omega'[\,|\lambda|(N+\varepsilon)] \\ \delta\Delta &= (N+\varepsilon)\,\Omega'[\,|\lambda|(N+\varepsilon)] - N\,\Omega'[\,|\lambda|\,N] < \varepsilon\,\Omega'[\,|\lambda|(N+\varepsilon)] + \\ &\qquad + \varepsilon\,N\,|\lambda|\,\Omega''[\,|\lambda|\,(N+\varepsilon)]\,; \end{aligned}\right.$$

conseguentemente, posto per brevità

$$(17)\qquad |\lambda|\,(N+\varepsilon) = L\,,$$

dalla (15) potremo ricavare *a fortiori*

$$|\varphi(x) - \varphi^*(x)| < |\lambda|\, F \times$$

$$\times \frac{N\,|\lambda|\,\Omega'[\,|\lambda|\,N]\,\Omega'(L) + \Omega[\,|\lambda|\,N]\,\Omega'(L) + N\,|\lambda|\,\Omega[\,|\lambda|\,N]\,\Omega''(L)}{|D(\lambda)|\,|D^*(\lambda)|}\,\varepsilon$$

e, a più forte ragione ancora,

$$(18)\qquad |\varphi(x)-\varphi^{*}(x)| < |\lambda|\, \mathrm{F}\, \frac{\Omega(\mathrm{L})\,\Omega'(\mathrm{L}) + \mathrm{L}[\Omega'^{2}(\mathrm{L}) + \Omega(\mathrm{L})\,\Omega''(\mathrm{L})]}{|\mathrm{D}(\lambda)|\,|\mathrm{D}^{*}(\lambda)|}\,\varepsilon\,.$$

Finalmente cerchiamo di far sparire il $\mathrm{D}(\lambda)$ che figura nel denominatore della (18), trattandosi, al contrario di $\mathrm{D}^{*}(\lambda)$, di quantità di cui, nei casi pratici, non è possibile conoscere il valore. A tal fine osserviamo che, se $\varepsilon$ è tanto piccolo da aversi

$$(19)\qquad |\mathrm{D}^{*}(\lambda)| > |\lambda|\,\Omega'(\mathrm{L})\,\varepsilon\,,$$

in virtù della (9) e della prima delle (16), sarà certamente

$$|\mathrm{D}(\lambda)| > |\mathrm{D}^{*}(\lambda)| - |\lambda|\,\Omega'(\mathrm{L})\,\varepsilon\,;$$

pertanto, nell' ipotesi indicata, alla ineguaglianza (18) può sostituirsi l'altra

$$(20)\qquad |\varphi(x)-\varphi^{*}(x)| < |\lambda|\, \mathrm{F}\, \frac{\Omega(\mathrm{L})\,\Omega'(\mathrm{L}) + \mathrm{L}[\Omega'^{2}(\mathrm{L}) + \Omega(\mathrm{L})\,\Omega''(\mathrm{L})]}{|\mathrm{D}^{*}(\lambda)|\,[\,|\mathrm{D}^{*}(\lambda)| - |\lambda|\,\Omega'(\mathrm{L})\,\varepsilon]}\,\varepsilon$$

in cui più non v'è traccia di $\mathrm{D}(\lambda)$.

Abbiamo così trovato il desiderato limite superiore di $|\varphi(x)-\varphi^{*}(x)|$. Non bisogna però dimenticare che la validità della (20) è subordinata a quella della (19); perciò, se, partendo da un certo $\mathrm{K}^{*}$, quest' ultima non risultasse verificata, bisogna ricominciare i calcoli con un nuovo $\mathrm{K}^{*}$ più approssimato, e così via finchè la (19) non sia soddisfatta.

**6**. Per poter utilizzare praticamente l' ineguaglianza (20), è quasi indispensabile poter disporre di una tabella numerica da cui trarre i valori della funzione $\Omega(x)$ e, coi noti metodi di *derivazione numerica*, quelli delle sue derivate. A titolo d'esempio abbiamo calcolata la seguente tabellina che fornisce, con quattro decimali, i valori di $\Omega(x)$ nell' intervallo $(0,1)$:

| $x$ | $\Omega(x)$ | | $x$ | $\Omega(x)$ | | $x$ | $\Omega(x)$ | | $x$ | $\Omega(x)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 1,0000 | | 0,25 | 1,3292 | | 0,50 | 1,9210 | | 0,75 | 3,0934 | |
| | | 525 | | | 910 | | | 1722 | | | 3612 |
| 0,05 | 1,0525 | | 0,30 | 1,4202 | | 0,55 | 2,0932 | | 0,80 | 3,4546 | |
| | | 584 | | | 1026 | | | 1980 | | | 4247 |
| 0,10 | 1,1109 | | 0,35 | 1,5228 | | 0,60 | 2,2912 | | 0,85 | 3,8793 | |
| | | 649 | | | 1161 | | | 2286 | | | 5015 |
| 0,15 | 1,1758 | | 0,40 | 1,6389 | | 0,65 | 2,5198 | | 0,90 | 4,3808 | |
| | | 724 | | | 1318 | | | 2650 | | | 5952 |
| 0,20 | 1,2482 | | 0,45 | 1,7707 | | 0,70 | 2,7848 | | 0,95 | 4,9760 | |
| | | 810 | | | 1503 | | | 3086 | | | 7104 |
| 0,25 | 1,3292 | | 0,50 | 1,9210 | | 0,75 | 3,0934 | | 1,00 | 5,6864 | |

Qualora non interessi avere nel secondo membro delle (19) e (20) i valori più ristretti possibili, si può evitare il calcolo della funzione $\Omega$, sostituendo ad essa una funzione $\Omega_0$ che sia *maggiorante* (in senso analitico) rispetto ad $\Omega$ e si possa esprimere per mezzo di funzioni elementari. Invero, se $\Omega_0$ è maggiorante rispetto ad $\Omega$, sarà certamente

$$\Omega_0'(\mathrm{L}) > \Omega'(\mathrm{L}),$$

$$\Omega_0(\mathrm{L})\,\Omega_0'(\mathrm{L}) + \mathrm{L}[\Omega_0'^2(\mathrm{L}) + \Omega_0(\mathrm{L})\,\Omega_0''(\mathrm{L})] > \Omega(\mathrm{L})\,\Omega'(\mathrm{L}) + \mathrm{L}[\Omega'^2(\mathrm{L}) + \Omega(\mathrm{L})\,\Omega''(\mathrm{L})].$$

Una di queste funzioni $\Omega_0$, interessante per la sua semplicità, risulta dalle seguenti considerazioni:

Separiamo anzitutto i termini di $\Omega(x)$ contenenti potenze pari di $x$ da quelli contenenti potenze dispari; avremo così

(21) $$\Omega(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)^m}{(2m)!}\, x^{2m} + x \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)^{m+1/2}}{(2m+1)!}\, x^{2m}.$$

Secondariamente osserviamo che si ha

$$\frac{(2m+1)^{m+1/2}}{(2m+1)!} \Big/ \frac{(2m)^m}{(2m)!} = \frac{1}{\sqrt{2m+1}}\left(1 + \frac{1/2}{m}\right)^m,$$

da cui, essendo

$$\left(1 + \frac{1/2}{m}\right)^m$$

una quantità che, al crescere di $m$, cresce sempre e tende a $\sqrt{e}$, si trae

$$\frac{(2m+1)^{m+1/2}}{(2m+1)!} \Big/ \frac{(2m)^m}{(2m)!} < \sqrt{\frac{e}{2m+1}} < 1 \quad (m > 0).$$

Ciò mostra che

$$\frac{(2m+1)^{m+1/2}}{(2m+1)!} \leq \frac{(2m)^m}{(2m)!} \quad (m \geq 0),$$

epperò dalla (21) segue che

(22) $$\Omega(x) \lessdot (1+x) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)^m}{(2m)!}\, x^{2m},$$

dove il segno $\lessdot$ denota che il secondo membro è *maggiorante* (in senso analitico) rispetto al primo, vale a dire che si tratta di due serie di potenze tali che ciascun coefficiente di quella a secondo membro non è inferiore al modulo del corrispondente coefficiente dell'altra.

Si noti ora che, avendosi, com'è noto,

(23) $$n! > n^n\, e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

potremo porre

(24) $$\frac{(2m)^m}{(2m)!} < \frac{(2m)^m}{(2m)^{2m}\, e^{-2m} \sqrt{4\pi m}} = \frac{e^{2m}}{2\sqrt{\pi m}\,(2m)^m}.$$

D'altra parte, alla (23) può contrapporsi l'ineguaglianza opposta

$$n! < \sqrt{2}\, n^n\, e^{-n} \sqrt{2\pi n}$$

(che, com'è facile vedere, vale già per $n=1$) dalla quale, cambiando $n$ in $m$, si ricava

$$m^m > \frac{m!\, e^m}{2\sqrt{\pi m}};$$

avremo quindi, sostituendo nella (24),

$$\frac{(2m)^m}{(2m)!} < \frac{e^{2m}}{2\sqrt{\pi m}\; 2^m} \; \frac{2\sqrt{\pi m}}{m!\, e^m} = \frac{(e/2)^m}{m!}.$$

Se ne conclude che dalla (22) può dedursi *a fortiori* che

$$\Omega(x) < (1+x) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(e/2)^m}{m!} x^{2m} = (1+x)\, e^{\frac{ex^2}{2}}, \tag{25}$$

vale a dire che una funzione maggiorante rispetto a $\Omega(x)$ è la funzione semplicissima

$$\Omega_0(x) = (1+x)\, e^{\frac{ex^2}{2}}.$$

**Matematica.** — *Sulle trasformazioni fra elementi lineari di due superficie che conservano il parallelismo di Levi-Civita.* Nota di O. MAYER, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

Assumiamo come coordinate di un elemento lineare M$t$ della superficie S le coordinate $(u, v)$ del suo punto M ed il parametro $w$ della direzione $t$ spiccata da M. La condizione di parallelismo di due elementi infinitamente vicini, $(u, v, w)$ e $(u+du, v+dv, w+dw)$, si scrive

$$\mathrm{A}\, du + \mathrm{B}\, dv - dw = 0, \tag{1}$$

con

$$\mathrm{A} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} w^2 + \left[ \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] w - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathrm{B} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} w^2 + \left[ \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \right] w - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

Ci proponiamo di determinare le trasformazioni fra elementi lineari di due superficie S, S′,

$$\begin{aligned} u' &= \mathrm{U}(u, v, w) \\ v' &= \mathrm{V}(u, v, w) \\ w' &= \mathrm{W}(u, v, w), \end{aligned} \tag{2}$$

che mutano ogni coppia di elementi paralleli di S in una coppia di elementi analoghi di S′. Ciò porta che si abbia, in forza delle (2),

$$\mathrm{A}'\, du' + \mathrm{B}'\, dv' - dw' \equiv \varrho\, (\mathrm{A}\, du + \mathrm{B}\, dv - dw),$$

[1] Presentata nella seduta del 15 giugno 1924.