ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

(che, com'è facile vedere, vale già per $n=1$) dalla quale, cambiando n in m, si ricava

$$m^m > \frac{m!\,e^m}{2\sqrt{\pi m}};$$

avremo quindi, sostituendo nella (24),

$$\frac{(2m)^m}{(2m)!} < \frac{e^{2m}}{2\sqrt{\pi m}\,2^m}\,\frac{2\sqrt{\pi m}}{m!\,e^m} = \frac{(e/2)^m}{m!}.$$

Se ne conclude che dalla (22) può dedursi *a fortiori* che

$$\Omega(x) < (1+x)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(e/2)^m}{m!}\,x^{2m} = (1+x)\,e^{\frac{ex^2}{2}}, \tag{25}$$

vale a dire che una funzione maggiorante rispetto a $\Omega(x)$ è la funzione semplicissima

$$\Omega_0(x) = (1+x)\,e^{\frac{ex^2}{2}}.$$

Matematica. — *Sulle trasformazioni fra elementi lineari di due superficie che conservano il parallelismo di Levi-Civita.* Nota di O. MAYER, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

Assumiamo come coordinate di un elemento lineare Mt della superficie S le coordinate (u, v) del suo punto M ed il parametro w della direzione t spiccata da M. La condizione di parallelismo di due elementi infinitamente vicini, (u, v, w) e $(u+du, v+dv, w+dw)$, si scrive

$$A\,du + B\,dv - dw = 0, \tag{1}$$

con

$$A = \left\{ {12 \atop 1} \right\} w^2 + \left[\left\{ {11 \atop 1} \right\} - \left\{ {12 \atop 2} \right\} \right] w - \left\{ {11 \atop 2} \right\}$$

$$B = \left\{ {22 \atop 1} \right\} w^2 + \left[\left\{ {12 \atop 1} \right\} - \left\{ {22 \atop 2} \right\} \right] w - \left\{ {12 \atop 2} \right\}.$$

Ci proponiamo di determinare le trasformazioni fra elementi lineari di due superficie S, S′,

$$\begin{aligned} u' &= U(u, v, w) \\ v' &= V(u, v, w) \\ w' &= W(u, v, w), \end{aligned} \tag{2}$$

che mutano ogni coppia di elementi paralleli di S in una coppia di elementi analoghi di S′. Ciò porta che si abbia, in forza delle (2),

$$A'\,du' + B'\,dv' - dw' \equiv \varrho\,(A\,du + B\,dv - dw),$$

[1] Presentata nella seduta del 15 giugno 1924.

indicando sempre con apici le quantità relative alla superficie S', e questa condizione equivale alle due seguenti:

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial u} + A\frac{\partial W}{\partial w} &= A'\left(\frac{\partial U}{\partial u} + A\frac{\partial U}{\partial w}\right) + B'\left(\frac{\partial V}{\partial u} + A\frac{\partial V}{\partial w}\right) \\ \frac{\partial W}{\partial v} + B\frac{\partial W}{\partial w} &= A'\left(\frac{\partial U}{\partial v} + B\frac{\partial U}{\partial w}\right) + B'\left(\frac{\partial V}{\partial v} + B\frac{\partial V}{\partial w}\right). \end{aligned}$$

Eccettuato il caso ovvio delle superficie sviluppabili che qui escludiamo, le funzioni U, V non sono arbitrarie, dovendo verificare le condizioni di integrabilità delle equazioni (3) rispetto alla sola incognita W. Per comodità di calcolo, eliminiamo la funzione incognita, ciò che si fa coll'introdurre l'angolo θ' delle direzioni w' e $v' = \text{cost}\,(w' = 0)$; le (3) diventano

$$(3')\qquad \begin{aligned} F_1 &\equiv \frac{\partial\theta'}{\partial u} + A\frac{\partial\theta'}{\partial w} + M = 0 \\ F_2 &\equiv \frac{\partial\theta'}{\partial v} + B\frac{\partial\theta'}{\partial w} + N = 0, \end{aligned}$$

ove

$$\begin{aligned} M &= R\left(\frac{\partial U}{\partial u} + A\frac{\partial U}{\partial w}\right) + S\left(\frac{\partial V}{\partial u} + A\frac{\partial V}{\partial w}\right) \\ N &= R\left(\frac{\partial U}{\partial v} + B\frac{\partial U}{\partial w}\right) + S\left(\frac{\partial V}{\partial v} + B\frac{\partial V}{\partial w}\right), \end{aligned}$$

$$R = \frac{\Delta'}{E'}\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}', \quad S = \frac{\Delta'}{E'}\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}', \quad \Delta = \sqrt{EG - F^2}.$$

Formiamo ora la parentesi di Poisson (F_1, F_2); eseguendo i calcoli si trova

$$\begin{aligned} (F_1, F_2) \equiv &\left(\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u} + B\frac{\partial A}{\partial w} - A\frac{\partial B}{\partial w}\right)\left(\frac{\partial\theta'}{\partial w} + R\frac{\partial U}{\partial w} + S\frac{\partial V}{\partial w}\right) \\ &- \left(\frac{\partial R}{\partial V} - \frac{\partial S}{\partial U}\right)\left[A\frac{\partial(U, V)}{\partial(v, w)} + B\frac{\partial(U, V)}{\partial(w, u)} - \frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)}\right]. \end{aligned}$$

Osservando le identità [1]

$$\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u} + B\frac{\partial A}{\partial w} - A\frac{\partial B}{\partial w} = -K(E + 2Fw + Gw^2) = -K f(w)$$

$$\frac{\partial R}{\partial V} - \frac{\partial S}{\partial U} = \Delta' K',$$

e ponendo per brevità

$$\Omega = \frac{\Delta' K'}{\Delta K}\left[A\frac{\partial(U, V)}{\partial(u, w)} + B\frac{\partial(U, V)}{\partial(w, u)} - \frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)}\right],$$

$$T = R\frac{\partial U}{\partial w} + S\frac{\partial V}{\partial w},$$

[1] Cfr. L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, I, pp. 101-102 (3ª ed.).

l'equazione da aggiungere alle (3') si scrive:

$$F_3 \equiv \left(\frac{\partial\theta'}{\partial w} + T\right) f(w) + \Delta\,\Omega = 0. \tag{4}$$

Il sistema (3') (4) trae seco le conseguenze differenziali

$$(F_1, F_3) = 0 \;,\; (F_2, F_3) = 0 .$$

Si ha

$$(F_1, F_3) \equiv -\Delta\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u} + A\frac{\partial\Omega}{\partial w}\right) - \frac{\partial\Delta}{\partial u}\Omega + \left(\frac{\partial A}{\partial w} f - A\frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial\theta'}{\partial w} + T\right)$$
$$+ \left(\frac{\partial M}{\partial w} - \frac{\partial T}{\partial u} - A\frac{\partial T}{\partial w} - T\frac{\partial A}{\partial w}\right) f,$$

ovvero, introducendovi il valore di $\frac{\partial\theta'}{\partial w}$ dalla (4),

$$(F_1, F_3) \equiv -\Delta\left(\frac{\partial\Omega}{\partial u} + A\frac{\partial\Omega}{\partial w}\right) + \left(\frac{\partial M}{\partial w} - \frac{\partial T}{\partial u} - A\frac{\partial T}{\partial w} - T\frac{\partial A}{\partial w}\right) f$$
$$+ \left(A\frac{\partial f}{\partial w} - \frac{\partial A}{\partial w} f + \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial \log \Delta}{\partial u} f\right)\frac{\Delta\Omega}{f}.$$

Si verificano subito l'annullarsi dell'ultima parentesi e l'identità

$$\frac{\partial M}{\partial w} - \frac{\partial T}{\partial u} - A\frac{\partial T}{\partial w} - T\frac{\partial A}{\partial w} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} - \frac{\partial R}{\partial V}\right)\frac{\partial(U, V)}{\partial(w, u)} = -\Delta' K' \frac{\partial(U, V)}{\partial(w, u)}.$$

In modo identico si calcolerà (F_2, F_3). Così siamo giunti al risultato seguente:

Affinchè la trasformazione (2) conservi il parallelismo del sig. Levi-Civita, le funzioni U, V devono soddisfare alle equazioni di secondo ordine

$$\tag{5} \begin{cases} \dfrac{\partial\Omega}{\partial u} + A\dfrac{\partial\Omega}{\partial w} + \Delta' K' \dfrac{f(w)}{\Delta}\dfrac{\partial(U, V)}{\partial(w, u)} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial\Omega}{\partial v} + B\dfrac{\partial\Omega}{\partial w} + \Delta' K' \dfrac{f(w)}{\Delta}\dfrac{\partial(U, V)}{\partial(w, v)} = 0 ; \end{cases}$$

e viceversa, scelte per U, V due soluzioni indipendenti del sistema (5), la trasformazione sarà determinata (con una quadratura) a meno di una costante.

Consideriamo più da vicino il caso in cui le funzioni U, V non contengono il parametro di direzione w; diremo allora che si ha una trasformazione di parallelismo ampliata dalla trasformazione puntuale

$$(2') \qquad \begin{aligned} u' &= \mathrm{U}(u, v) \\ v' &= \mathrm{V}(u, v) . \end{aligned}$$

Dalle (5) segue

$$(6) \qquad -\Omega = \frac{\Delta' \mathrm{K}'}{\Delta \mathrm{K}} \frac{\partial(\mathrm{U}, \mathrm{V})}{\partial(u, v)} = c \text{ (costante)},$$

onde

$$\iint \mathrm{K}'\Delta' \, du' \, dv' = c \iint \mathrm{K}\Delta \, du \, dv ,$$

gli integrali doppî essendo estesi a due aree corrispondenti nella trasformazione (2'); viceversa, se l'identità precedente ha luogo per ogni coppia di aree corrispondenti, ne segue la (6). Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente, affinchè una trasformazione puntuale fra due superficie possa essere ampliata in una trasformazione di parallelismo, è che essa conservi il rapporto delle curvature totali di due aree.

Ne segue che, nelle rappresentazioni sferiche (di Gauss) delle due superficie, il rapporto di due aree corrispondenti è costante. Lo stesso fatto accade poi anche per le superficie obiettive, se hanno curvatura costante.

L'equazione (4) ci dà ancora

$$\frac{\partial \theta'}{\partial w} = c \frac{\Delta}{f} = c \frac{\partial \theta}{\partial w} ,$$

onde

$$\theta' = c\theta + \varphi(u, v) ,$$

$\varphi(u, v)$ essendo determinata dalle (3) a meno di una costante additiva. Concludiamo quindi:

In una trasformazione di parallelismo ampliata, il rapporto di due angoli è costante.

Si ottengono tutte le trasformazioni di parallelismo che amplificano una data trasformazione puntuale, applicando ad una di esse tutte le rotazioni di amplitudine costante degli elementi attorno ai loro punti.