ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE
DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 16 novembre 1924.

V. Scialoja Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI.

Matematica. — *Sopra una classe di coppie di congruenze rettilinee stratificabili.* Nota del Socio Luigi Bianchi [1].

1.

Dal teorema generale di permutabilità nella teoria delle trasformazioni *asintotiche* di superficie per congruenze rettilinee W venne posta in luce l'esistenza di infinite coppie di congruenze rettilinee associate (r), (r'), in corrispondenza biunivoca dei loro raggi r, r', e dotate di proprietà geometriche (di natura proiettiva), che qui riassumiamo [2].

Esiste una prima serie ∞^1 di superficie S i cui punti sono distribuiti sui singoli raggi r ed i cui piani tangenti passano pel corrispondente raggio r', e similmente una seconda serie ∞^1 di superficie S' coi punti distribuiti sui raggi r' ed i cui piani tangenti passano pel corrispondente raggio r.

Gli elementi piani, o *faccette*, delle ∞^1 superficie S (o delle S') costituiscono una infinità ∞^3 di faccette piane individuate dalla coppia di congruenze associate (r), (r'), come quelle che hanno i centri distribuiti sui raggi r (sui raggi r') ed i cui piani passano pel corrispondente raggio r' (pel raggio r). Ora un'infinità ∞^3 di faccette piane non può, in generale, ordinarsi in ∞^1 superficie S; e, quando tale ordinamento sia possibile, si dirà che la moltiplicità ∞^2 di faccette è *stratificabile*. La distribuzione nelle ∞^1 superficie S stratificate dipende allora, in modo unico, dalla integrazione di

[1] Presentata nella seduta dei 2 novembre 1924.

[2] Cfr. le mie *Lezioni di geometria differenziale*, 2ª edizione (1903), vol. II, § 248; 3ª edizione (1923), § 301.

un'equazione ai differenziali totali (in due variabili indipendenti); e le condizioni d'illimitata integrabilità di questa dànno appunto le condizioni necessarie e sufficienti perchè la molteplicità ∞^3 di faccette sia stratificabile. Ed allora, per una coppia di congruenze associate (r), (r'), diremo che la coppia è stratificabile quando siano stratificabili ambedue le molteplicità ∞^3 di faccette coordinate alla coppia di congruenze. Con queste denominazioni possiamo dire che l'accennato teorema di permutabilità fa conoscere l'esistenza di infinite coppie di congruenze rettilinee stratificabili. Fermiamo ora l'attenzione sopra una particolare classe di siffatte coppie di congruenze, che si presentano nella inversione dei teoremi di Guichard per le deformate delle quadriche rotonde, e nelle quali avviene che due raggi corrispondenti sono sempre fra loro ortogonali. Si può allora proporre il problema di trovare tutte le coppie di congruenze rettilinee stratificabili per le quali ogni coppia (r, r') di raggi corrispondenti è formata di due rette ortogonali.

Nella presente Nota mi limiterò a risolvere una questione ancora più particolare, come risulta dal seguente enunciato:

Problema A). *Trovare tutte le coppie (r), (r') di congruenze rettilinee stratificabili, nelle quali due raggi corrispondenti r, r' sono sempre fra loro ortogonali* (¹), *e inoltre la perpendicolare comune pp' ai due raggi passa per un punto fisso o dello spazio.*

Dimostreremo che il problema si identifica coll'altro, di ben nota risoluzione, di trovare tutte le superficie applicabili sul paraboloide rotondo reale o immaginario. In effetto ogni deformata del paraboloide rotondo dà luogo ad una coppia (r), (r') di congruenze soluzione del problema A), e viceversa.

2.

Per trattare il problema A) enunciato, faremo uso dell'analisi seguente:

Supposto di avere una tale coppia (r), (r') di congruenze, consideriamo una coppia generica r, r' di raggi (ortogonali corrispondenti) e situiamo l'origine nel punto fisso o per cui passano tutte le perpendicolari comuni pp' ai due raggi. Le tre direzioni segnate dalle rette r, r' e dalla loro perpendicolare comune opp' (dove con p, p' indicheremo i piedi della perpendicolare su r, r') formano una terna ortogonale e noi denoteremo i loro rispettivi coseni di direzione con

$$\begin{array}{ll} r) & X_1, Y_1, Z_1 \\ r') & X_2, Y_2, Z_2 \\ opp') & X_3, Y_3, Z_3. \end{array}$$

(¹) Ulteriori calcoli, troppo lunghi per essere qui riportati, provano che la condizione d'ortogonalità dei raggi corrispondenti è una conseguenza della seconda che le perpendicolari comuni pp' passino per un punto fisso. Non vi son quindi altre coppie di congruenze stratificabili soddisfacenti alla seconda condizione oltre quelle determinate nel testo.

Queste saranno funzioni di due parametri u, v, i quali scegliamo in guisa che, sulla sfera unitaria colla quale intercettiamo i raggi opp', le linee $u =$ cost., $v =$ cost. abbiano le tangenti rispettivamente parallele ai raggi r, r'. Il sistema (u, v) sarà dunque sulla sfera un sistema ortogonale e noi scriveremo il quadrato ds'^2 dell'elemento lineare sferico

$$ds'^2 = dX_3^2 + dY_3^2 + dZ_3^2$$

sotto la forma

$$ds'^2 = e\,du^2 + g\,dv^2 .$$

Varranno allora per le derivate dei nove coseni (X_i, Y_i, Z_i) le formole fondamentali:

$$(\alpha)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}X_2 - \sqrt{e}\,X_3 , \quad \frac{\partial X_2}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}X_1 , \quad \frac{\partial X_3}{\partial u} = \sqrt{e}\,X_1 \\ &\frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}X_2 , \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}X_1 - \sqrt{g}\,X_3 , \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = \sqrt{g}\,X_2 \end{aligned}\right.$$

colle analoghe per gli altri due assi. Per le coordinate (x_p, y_p, z_p), $(x_{p'}, y_{p'}, z_{p'})$ dei punti p, p', piedi della perpendicolare opp', avremo poi le formole

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &x_p = AX_3 , \quad y_p = AY_3 , \quad z_p = AZ_3 \\ &x_{p'} = BX_3 , \quad y_{p'} = BY_3 , \quad z_{p'} = BZ_3 , \end{aligned}\right.$$

dove A, B saranno funzioni determinate di u, v.

Secondo la nostra ipotesi, deve esistere una serie ∞^1 di superficie S coi punti distribuiti sui raggi r e coi piani tangenti passanti per r'; e similmente una seconda serie ∞^1 analoga, di superficie S', scambiato r con r'. Le coordinate x, y, z di un punto di una S, e quelle x', y', z' di un punto di una S' saranno date dalle formole

$$(2)\quad x = x_p + TX_1 = TX_1 + AX_3 , \quad y = TY_1 + AY_3 , \quad z = TZ_1 + AZ_3 ,$$
$$(2')\quad x' = x_{p'} + T'X_2 = T'X_2 + BX_3 , \quad y' = T'Y_2 + BY_3 , \quad z' = TZ_2 + BZ_3 ,$$

dove T, T' saranno convenienti funzioni di u, v contenenti, ciascuna, una costante arbitraria. La normale ad una superficie S nel punto (x, y, z) deve essere, per ipotesi, normale alla direzione (X_2, Y_2, Z_2) e nello stesso tempo normale alla congiungente i due punti (x, y, z) e $(x_{p'}, y_{p'}, z_{p'})$. I coseni di direzione di quest'ultima congiungente sono proporzionali alle differenze

$$x - x_{p'} = TX_1 + (A - B)\,X_3 , \quad y - y_{p'} = TY_1 + (A - B)\,Y_3 ,$$
$$z - z_{p'} = TZ_1 + (A - B)\,Z_3 .$$

Pei coseni di direzione (X, Y, Z) della normale alla superficie S valgono quindi le formole

$$(3)\qquad X \equiv (B-A)\,X_1 + TX_3\,,\quad Y \equiv (B-A)\,Y_1 + TY_3\,,\quad Z \equiv (B-A)\,Z_1 + TZ_3\,,$$

dove il segno $\equiv$ significa proporzionalità. Dovranno per ciò sussistere le due condizioni seguenti:

$$(4)\qquad \begin{cases} X\dfrac{\partial x}{\partial u} + Y\dfrac{\partial y}{\partial u} + Z\dfrac{\partial z}{\partial u} = 0 \\[2ex] X\dfrac{\partial x}{\partial v} + Y\dfrac{\partial y}{\partial v} + Z\dfrac{\partial x}{\partial v} = 0\,, \end{cases}$$

che calcoliamo derivando in primo luogo le formole (2), coll'aver riguardo alle (α), il che dà

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial u} = \left(\dfrac{\partial T}{\partial u} + A\sqrt{e}\right)X_1 - \dfrac{T}{\sqrt{g}}\dfrac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}X_2 + \left(\dfrac{\partial A}{\partial u} - T\sqrt{e}\right)X_3 \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial v} = \dfrac{\partial T}{\partial v}X_1 + \left(\dfrac{T}{\sqrt{e}}\dfrac{\partial\sqrt{g}}{\partial u} + A\sqrt{g}\right)X_2 + \dfrac{\partial A}{\partial v}X_3\,. \end{cases}$$

Sostituendo nelle (4) per X, Y, Z i valori proporzionali (3) e per le derivate di x, y, z i valori superiori (5), troviamo, per la funzione incognita T, il seguente sistema simultaneo del 1° ordine (del tipo di Riccati):

$$(\mathrm{I})\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial u} = -\dfrac{\sqrt{e}}{A-B}T^2 + \dfrac{1}{A-B}\dfrac{\partial A}{\partial u}T - A\sqrt{e} \\[2ex] \dfrac{\partial T}{\partial v} = \dfrac{1}{A-B}\dfrac{\partial A}{\partial v}T\,. \end{cases}$$

Senza ripetere il calcolo per la seconda serie ∞^1 di superficie S', basterà evidentemente scambiare nei risultati precedenti (u, v), (T, T'), (A, B), (e, g) e si avrà, per la seconda funzione incognita T', il sistema analogo

$$(\mathrm{I}^*)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial T'}{\partial u} = \dfrac{1}{A-B}\dfrac{\partial B}{\partial u}T' \\[2ex] \dfrac{\partial T'}{\partial v} = -\dfrac{\sqrt{g}}{B-A}T'^2 + \dfrac{1}{B-A}\dfrac{\partial B}{\partial v}T' - B\sqrt{g}\,. \end{cases}$$

E siccome le (I), (I*) debbono ammettere rispettivamente una soluzione T, o T', contenente una costante arbitraria, dovranno essere *identicamente soddisfatte*, per l'uno o per l'altro sistema di Riccati, le condizioni d'integrabilità.

3.

In generale, per due equazioni simultanee del tipo di Riccati

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial u} &= aT^2 + bT + c\\ \frac{\partial T}{\partial v} &= a'T^2 + b'T + c',\end{aligned}\right.$$

le condizioni di (illimitata) integrabilità si scrivono

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial a}{\partial v} - \frac{\partial a'}{\partial u} = ba' - ab'\\ &\frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial b'}{\partial u} = 2(ca' - ac')\\ &\frac{\partial c}{\partial v} - \frac{\partial c'}{\partial u} = cb' - bc'.\end{aligned}\right.$$

Calcolandole ordinatamente per il sistema (I), si ottiene

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{e}}{A-B}\right) = -\frac{\sqrt{e}}{(A-B)^2}\frac{\partial A}{\partial v}\\ &\frac{\partial(A-B)}{\partial v}\frac{\partial A}{\partial u} - \frac{\partial(A-B)}{\partial u}\frac{\partial A}{\partial v} = 0\\ &\frac{\partial}{\partial v}(A\sqrt{e}) = \frac{A\sqrt{e}}{A-B}\frac{\partial A}{\partial v},\end{aligned}\right.$$

e queste possono scriversi:

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} = -\frac{\sqrt{e}}{A-B}\frac{\partial B}{\partial v}\\ &\frac{\partial(A, B)}{\partial(u, v)} = 0\\ &\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v} = \frac{B}{A}\frac{\sqrt{e}}{A-B}\frac{\partial A}{\partial v}.\end{aligned}\right.$$

La media esprime che A, B debbono essere funzioni l'una dell'altra, e dal paragone delle estreme risulta

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial v}(AB) = 0, \quad \text{ossia} \quad AB = \varphi(u);$$

dopo di che la prima e terza coincidono nella

$$(8)\qquad \frac{\partial \log\sqrt{e}}{\partial v} = \frac{B}{A(A-B)}\frac{\partial A}{\partial u}.$$

Similmente le condizioni d'integrabilità per il sistema (I*) daranno

(7*) $$\frac{\partial}{\partial u}(\mathrm{AB}) = 0$$

e l'altra

(8*) $$\frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u} = \frac{1}{\mathrm{A} - \mathrm{B}} \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial u}.$$

Dalle (7), (7*) segue che *il prodotto* AB *deve essere una costante*: poniamo

(9) $$\mathrm{AB} = c.$$

Osserviamo intanto il significato geometrico di questa condizione dove, escludendo il caso privo d'interesse che c si annulli [1], dovremo distinguere due casi, secondo che c si suppone positiva o negativa, e porremo nel primo caso

$$c = \mathrm{R}^2,$$

nel secondo caso $c = -\mathrm{R}^2$. Avendosi allora

$$op \cdot op' = \pm \mathrm{R}^2;$$

si vede che

Le coppie associate di congruenze (r), (r'), *che dànno soluzioni del problema* A), *debbono essere polari reciproche rispetto alla sfera reale o immaginaria*

$$x^2 + y^2 + z^2 \mp \mathrm{R}^2 = 0.$$

secondo che $c = +\mathrm{R}^2$, *o* $c = -\mathrm{R}^2$.

4.

Ora, proseguendo la nostra analisi, procediamo alla integrazione delle (8), (8*), le quali, essendo $\mathrm{B} = \frac{c}{\mathrm{A}}$, si scrivono

$$\frac{\partial \log \sqrt{e}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\sqrt{\mathrm{A}^2 - c}}{\mathrm{A}}$$

$$\frac{\partial \log \sqrt{g}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{\mathrm{A}^2 - c},$$

[1] Se c si annulla, sarebbe nulla A o B, poniamo B; ed allora tutti i piani tangenti delle ∞^1 superficie S passerebbero per l'origine, e le S sarebbero coni col vertice in o.

e, integrate, dànno

$$\sqrt{e} = V \frac{\sqrt{A^2 - c}}{A}, \quad \sqrt{g} = U \sqrt{A^2 - c},$$

con V funzione della sola v, e U di u. Disponendo dei parametri u, v, possiamo dare ad U, V valori costanti arbitrarii, e noi poniamo

$$V = 1, \quad U = R.$$

Abbiamo così

(10) $$e = \frac{A^2 \mp R^2}{A^2}, \quad g = \frac{A^2 \mp R^2}{R^2};$$

indi, fra i coefficienti e, g dell'elemento lineare sferico, la relazione

(11) $$\frac{1}{e} - \frac{1}{g} = 1, \quad \text{per} \quad c = R^2 \text{ (}^1\text{)}$$

(11*) $$\frac{1}{e} + \frac{1}{g} = 1, \quad \text{per} \quad c = -R^2.$$

Nel caso (11), introducendo una funzione ausiliaria θ, potremo porre

$$\frac{1}{e} = \cos h^2 \theta, \quad \frac{1}{g} = \operatorname{sen} h^2 \theta$$

e si avrà quindi, per l'elemento lineare sferico,

(II) $$ds'^2 = \frac{du^2}{\cosh^2 \theta} + \frac{dv^2}{\operatorname{senh}^2 \theta}.$$

Nel caso (11*) si porrà invece

$$\frac{1}{e} = \operatorname{sen}^2 \omega, \quad \frac{1}{g} = \cos^2 \omega,$$

e si avrà l'altra forma

(II*) $$ds'^2 = \frac{du^2}{\operatorname{sen}^2 \omega} + \frac{dv^2}{\cos^2 \omega}.$$

(1) Propriamente, nel caso $c = R^2$, vi sarebbe da considerare l'altra possibilità

$$e = \frac{R^2 - A^2}{A^2}, \quad g = \frac{R^2 - A^2}{R^2}$$

e quindi fra e, g la relazione

$$\frac{1}{g} - \frac{1}{e} = 1,$$

che differisce dalla (11) solo per lo scambio di e con g.

Queste sono le ben note forme del ds'^2 sferico rappresentativo che convengono, secondo i celebri teoremi di Weingarten, alle immagini delle linee di curvatura per le *evolventi* delle superficie applicabili sul paraboloide rotondo *reale* nel caso (II), e sul paraboloide rotondo *immaginario* nel caso (II*).

Inversamente, quando l'elemento lineare sferico sia ridotto ad una forma (II), basta porre, secondo le (10),

$$A = R \coth \theta \quad , \quad B = R \operatorname{tgh} \theta \,, \tag{12}$$

e si avrà corrispondentemente una coppia di congruenze associate e stratificabile come soluzione del problema A) nel caso $c = R^2$. E nell'altro caso di una forma (II*) dell'elemento sferico, basterà porre

$$A = R \operatorname{tg} \omega \quad , \quad B = -R \cot \omega \,. \tag{12*}$$

Quando sia data una deformata Σ del paraboloide rotondo (reale od immaginario), per costruire la coppia (r), (r') di congruenze associate, si dovrà dunque procedere nel modo seguente: si prendano sulla Σ le geodetiche deformate dei meridiani e le loro linee a tangenti coniugate, che si assumeranno a linee coordinate (u, v). Per il centro o della sfera unitaria si conducano i raggi paralleli alle tangenti delle dette geodetiche e si intersechino colla superficie sferica. L'elemento lineare sferico rappresentativo, con una conveniente scelta dei parametri u, v, prenderà la forma (II) o (II*) secondo che il paraboloide fondamentale sarà reale o immaginario. E allora le formole (12), o (12*), individueranno completamente le coppie corrispondenti (r), (r') di congruenze associate, soluzione del problema A).

5.

Potremmo ora, proseguendo i calcoli, integrare i sistemi di Riccati (I) e (I*) per ottenere le superficie S e S′ stratificate delle nostre congruenze e studiarne le proprietà geometriche. Ma si può raggiungere più rapidamente lo scopo colle seguenti considerazioni di metrica non-euclidea, le quali dimostrano inoltre che la risoluzione del problema A) si identifica colla ricerca delle superficie *a curvatura assoluta nulla* in metrica non-euclidea.

Si è visto al n. 3 che ogni coppia (r), (r') delle nostre congruenze è costituita di congruenze polari rispetto alla sfera reale o immaginaria

$$x^2 + y^2 + z^2 \mp R^2 = 0 \,.$$

Assumiamo allora questa sfera come *assoluto* di una metrica di Cayley, che sarà dunque iperbolica nel primo caso $(c = R^2)$, ellittica nel secondo caso $(c = -R^2)$. In metrica non-euclidea, l'essere la coppia di congruenze stratificabile significa che le ∞^1 superficie S sono ortogonali ai raggi r, e le ∞^1 superficie S′ ortogonali ai raggi r'. E siccome sono polari rispetto all'assoluto, i due fuochi ed i due piani focali per ogni raggio sono coniugati rispetto all'assoluto. Ne risulta che le superficie S (o le S′) vengono a identificarsi colle superficie a curvatura totale nulla della metrica iperbolica od ellittica (¹).

È noto, poi, che sulle superficie S parallele a curvatura nulla le asintotiche si corrispondono, e corrispondono a quelle delle polari S′. E siccome le asintotiche in metrica non-euclidea od euclidea sono le medesime, ne consegue:

Due qualunque delle superficie S, S′ *sono le due falde focali di una congruenza rettilinea* W, onde ci troviamo precisamente nelle condizioni del teorema di permutabilità ricordato da principio.

Da ultimo osserviamo che, in metrica non-euclidea, si corrispondono le linee di curvatura sulle S e sulle S′ e corrispondono alle sviluppabili delle congruenze (r), (r'). Adunque: *in metrica euclidea le sviluppabili delle congruenze* (r), (r') *si corrispondono e tagliano sulle superficie stratificate* S, S′ *un sistema coniugato.*

Per questa proprietà le congruenze qui considerate rientrano come caso particolare in una classe recentemente studiata dal prof. Fubini (²).

Terminiamo coll'osservare che le proprietà dedotte nel presente numero mediante considerazioni di metrica non-euclidea potrebbero facilmente constatarsi colle formole sviluppate nei numeri precedenti.

Chimica-fisica. — *Soluzioni solide fra composti di elementi a valenza diversa* (³). Nota del Socio G. Bruni e di G. R. Levi (⁴).

Fra i casi di formazione di cristalli misti più interessanti e degni di essere investigati coi nuovi metodi basati sull'impiego dei raggi X sono quelli presentati da coppie di composti di elementi aventi valenza diversa e costituiti quindi da numeri diversi di atomi.

È infatti da chiedersi come possa in tali casi avvenire la sostituzione reciproca degli atomi vicarianti nel reticolo ed è interessante di indagare se e quali mutamenti si producano nel reticolo stesso.

Un caso notissimo ed assai importante è quello dell'isomorfismo fra molibdati dei metalli alcalino-terrosi e del piombo da un lato e quelli delle terre rare dall'altro, studiati da Zambonini (⁵).

(¹) Vedi le citate *Lezioni*: 2ª edizione, vol. I, § 221; 3ª edizione, vol. II, § 492.

(²) *Su alcune classi di congruenze dirette e sulle trasformazioni delle superficie* R [Annali di matematica, serie IV, tomo I, pag. 250 sgg. (1924)].

(³) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale del Politecnico di Milano.

(⁴) Pervenuta all'Accademia il 14 ottobre 1924.

(⁵) Rivista di Mineralogia e Cristallografia italiana, vol. XLV (1915), pag. 1; Rendiconti dei Lincei, vol. XXXII, 1923 (1° sem.), pag. 518.