ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Quelques compléments sur les transformations qui conservent la composition.* Nota di J. PÉRÈS, presentata dal Socio V. VOLTERRA [1].

1. J'ai envisagé, ailleurs [2], des transformations du type

$$(1) \qquad G(x, y) = \lambda(y - x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\, \Phi(\xi\,;\, x, y)\, d\xi$$

qui, le noyau Φ étant supposé connu, font correspondre une $G(x, y)$ à toute $\lambda(y - x)$. J'ai donné [3] l'expression générale du noyau Φ lorsque *la transformation* (1) *conserve la composition*; c'est-à-dire fait passer de la résultante de deux fonctions λ à la résultante des fonctions G correspondantes.

Cette expression est la suivante:

$$\Phi(\xi\,;\, x, y) = n(x + \xi, y) + m(x, y - \xi) + \int_x^{y-\xi} m(x, \zeta)\, n(\zeta + \xi, y)\, d\zeta$$

avec, entre les fonctions m et n, la relation

$$(2) \qquad (\overset{\times}{1^{\circ}} + \overset{\times}{m})\,(\overset{\times}{1^{\circ}} + \overset{\times}{n}) = \overset{\times}{1^{\circ}}\,;$$

l'une des fonctions m et n peut donc être prise arbitrairement.

Il en résulte, pour la transformation (1), la forme

$$(1') \qquad G(x, y) = (\overset{\times}{1^{\circ}} + \overset{\times}{m})\, \overset{\times}{\lambda}\, (\overset{\times}{1^{\circ}} + \overset{\times}{n})$$

et la propriété fondamentale que la transformation *conserve la composition* est alors, grâce à (2), tout à fait intuitive.

2. Voici une généralisation immédiate.

M, Λ, G étant des fonctions de x et de y, *la première donnée*, la formule

$$(3) \qquad G = \overset{\times}{M}\, \overset{\times}{\Lambda}\, \overset{\times}{M}^{-1}$$

fait passer de Λ à G et la transformation correspondante conserve encore la composition. Nous supposons, bien entendu, la fonction M telle que l'on

[1] Presentata nella Seduta del 2 novembre 1924.

[2] Cfr. *Leçons sur la composition et les fonctions permutables* de *V. Volterra et J. Pérès*, p. 60. On trouvera, dans ce livre, d'autres indications bibliographiques.

[3] Ibid.

se trouve dans le champ d'application de la théorie des fractions de composition [1].

3. Dans le cas du premier paragraphe

$$\overset{\times}{M} = \overset{\times}{1}^{o} + \overset{\times}{m};$$

c'est un cas particulièrement important, par suite de la simplicité du calcul de

$$\overset{\times}{M}^{-1} = \overset{\times}{1}^{o} + \overset{\times}{n}.$$

La transformation obtenue fait correspondre à toutes les fonctions $\lambda(y-x)$ du cycle fermé des fonctions $G(x,y)$ permutables entre elles. Si, plus généralement, on fait varier $\Lambda(x,y)$ dans un groupe de fonctions permutables, la fonction correspondante $G(x,y)$ décrira aussi un groupe de fonctions permutables: nous retrouvons ainsi, sous une forme un peu différente, l'isomorphisme entre groupes de fonctions permutables signalé par M.r Volterra [2].

4. Revenons maintenant sur l'application des considerations précédentes à la recherche de toutes les fonctions permutables avec une fonction donnée $F(x,y)$.

Supposons la fonction F du 1er ordre. S'il est possible de déterminer m (et n) de façon que

$$F = (\overset{\times}{1}^{o} + \overset{\times}{m})\,\overset{\times}{1}\,(\overset{\times}{1} + \overset{\times}{n}), \tag{4}$$

le problème est résolu. En effet toute fonction G permutable avec F est telle que

$$G = (\overset{\times}{1}^{o} + \overset{\times}{m})\,\overset{\times}{\Lambda}\,(\overset{\times}{1} + \overset{\times}{m})$$

l'égalité précédente déterminant $\Lambda(x\cdot y)$ [3]. F et G étant permutables, 1 et Λ le seront aussi; il faut donc prendre

$$\Lambda = \lambda(y-x),$$

et la formule

$$G = (\overset{\times}{1}^{o} + \overset{\times}{m})\,\overset{\times}{\lambda}\,(\overset{\times}{1}^{o} + \overset{\times}{n}), \tag{4'}$$

où λ est arbitraire, donnera toutes les fonctions G cherchées.

(1) Ibid., chap. VI.

(2) Loc. cit., p. 76.

(3) On a $\Lambda = (\overset{\times}{1}^{o} + \overset{\times}{n})\,\overset{\times}{G}\,(\overset{\times}{1}^{o} + \overset{\times}{m})$; on voit l'avantage qu'il y a à prendre, autant que possible, la fonction M de forme $(\overset{\times}{1}^{o} + m)$: $\overset{\times}{M}^{-1}$ sera de forme analogue.

Il nous reste donc à déterminer m et n verifiant l'équation (4). J'ai traité cette question [1] dans le cas où la fonction F est réduite à la forme canonique et est régulière, c'est à dire telle que la dérivée

$$F''_{xy}$$

est finie et continue; m et n sont alors telles que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right) m = \nabla m \text{ et } \nabla n$$

soient finies et continues [2].

5. Il est facile de traiter aussi le cas où F, toujours canonique, est telle que c'est la dérivée

$$F''_{y^2}$$

qui est finie et continue [3]. La fonction F peut s'écrire

$$F = 1 + \overset{\times}{H}\,\overset{\times}{1}^2$$

(où H désigne F''_{y^2}): et si l'on pose

$$F_1 = \overset{\times}{1}\,\overset{\times}{F}\,\overset{\times}{1}^{-1} \quad \text{ou} \quad F = \overset{\times}{1}^{-1}\,\overset{\times}{F}_1\,\overset{\times}{1},$$

F_1 *sera évidemment régulière.* On connait donc toutes les fonctions permutables avec F_1 ; toutes les fonctions permutables avec F s'en déduiront par application d'une transformation de type (3) où M est pris égal à $\overset{\times}{1}^{-1}$.

Soient d'ailleurs m_1 et n_1 telles que

$$F_1 = (\overset{\times}{1}^0 + \overset{\times}{m}_1)\,\overset{\times}{1}\,(\overset{\times}{1}^0 + \overset{\times}{n}_1):$$

on a

$$F = \overset{\times}{1}^{-1}(\overset{\times}{1}^0 + \overset{\times}{m}_1)\,\overset{\times}{1}\,(\overset{\times}{1}^0 + \overset{\times}{n}_1)\,\overset{\times}{1}$$

$$= (\overset{\times}{1}^0 + \overset{\times}{m})\,\overset{\times}{1}\,(\overset{\times}{1}^0 + \overset{\times}{n}),$$

[1] Ibid, chap. IV.

[2] Cela n'implique pas l'existence des deux dérivées n'_x et n'_y, mais seulement l'existence de la dérivée totale par rapport à x lorsque $y = x + \text{cost.}$ (voir ibid., p. 69).

[3] On raisonnerait de façon analogue si c'était F''_{x^2} qui était finie et continue.

en déterminant m et n par les équations

$$\overset{\times}{1}^{-1}\overset{\times}{m}_1 = \overset{\times}{m}\overset{\times}{1}^{-1} \quad , \quad \overset{\times}{n}_1\overset{\times}{1} = \overset{\times}{1}\,n \, ,$$

qui se résolvent aisément par les formules

$$m = m_1 - \int_x^y \nabla m_1(x\,,\zeta)\,d\zeta \quad , \quad n = n_1 - \int_x^y \nabla n_1(x\,,\zeta)\,d\zeta \, .$$

Il n'y a donc pas de difficulté à mettre F sous la forme (4), et les fonctions permutables avec F seront encore toutes données par (4').

Matematica. — *Sulla geometria differenziale di superficie aventi interesse idrodinamico.* Nota di BRUTO CALDONAZZO, presentata dal Corrispondente U. CISOTTI.

Nello studio del moto stazionario di un fluido, si incontrano delle superficie che sono, in pari tempo, di flusso e vorticose. Se il fluido è sollecitato da forze conservative e la densità è funzione della sola pressione, le superficie in questione godono della proprietà che su di esse il noto trinomio di Bernoulli conserva valore costante, diverso in generale da superficie a superficie. Per questa ragione ho proposto di chiamarle *superficie di Bernoulli* (1). Mi ero proposto il loro studio col metodo vettoriale generale, come fa il Burali-Forti in una sua bella Memoria del 1912 (2). Il mio caso però esigeva di verificare prima se il metodo del Burali-Forti era senz'altro applicabile. Infatti, il Burali-Forti considera in sostanza, pur non dicendolo espressamente, un sistema di superficie normali ad una congruenza di rette. Le mie superficie invece, indipendentemente da ogni significato fisico, costituiscono il sistema normale di una congruenza di linee, in generale non rette. Per lo studio della geometria differenziale su di queste superficie, seguendo il Burali-Forti, introduco l'omografia vettoriale $\sigma = \dfrac{d\mathrm{N}}{d\mathrm{P}}$, in cui N è il vettore unitario tangente alle linee della congruenza, con verso assegnato. Ho potuto così constatare, ed è ciò che qui mi interessa, che la curvatura media e la curvatura totale sono espresse rispettivamente dall'inva-

(1) In una Nota in corso di stampa sul Bollettino dell'Unione matematica italiana.

(2) *Fondamenti per la geometria differenziale su di una superficie col metodo vettoriale generale*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo XXXIII (1912), pp. 1-40. Nel contesto citerò questa Memoria semplicemente con F. G. Così, dovendosi richiamare spesso l'*Analyse vectorielle générale*, vol. I o II, di C. Burali-Forti ed R. Marcolongo, citerò brevemente A. V. G. I o II.