ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

en déterminant m et n par les équations

$$\overset{\times}{1}{}^{-1}\,\overset{\times}{m}_1 = \overset{\times}{m}\,\overset{\times}{1}{}^{-1} \quad , \quad \overset{\times}{n}_1\,\overset{\times}{1} = \overset{\times}{1}\,n \,,$$

qui se résolvent aisément par les formules

$$m = m_1 - \int_x^y \nabla m_1(x\,,\zeta)\,d\zeta \quad , \quad n = n_1 - \int_x^y \nabla n_1(x\,,\zeta)\,d\zeta \,.$$

Il n'y a donc pas de difficulté à mettre F sous la forme (4), et les fonctions permutables avec F seront encore toutes données par (4').

Matematica. — *Sulla geometria differenziale di superficie aventi interesse idrodinamico.* Nota di BRUTO CALDONAZZO, presentata dal Corrispondente U. CISOTTI.

Nello studio del moto stazionario di un fluido, si incontrano delle superficie che sono, in pari tempo, di flusso e vorticose. Se il fluido è sollecitato da forze conservative e la densità è funzione della sola pressione, le superficie in questione godono della proprietà che su di esse il noto trinomio di Bernoulli conserva valore costante, diverso in generale da superficie a superficie. Per questa ragione ho proposto di chiamarle *superficie di Bernoulli* [1]. Mi ero proposto il loro studio col metodo vettoriale generale, come fa il Burali-Forti in una sua bella Memoria del 1912 [2]. Il mio caso però esigeva di verificare prima se il metodo del Burali-Forti era senz'altro applicabile. Infatti, il Burali-Forti considera in sostanza, pur non dicendolo espressamente, un sistema di superficie normali ad una congruenza di rette. Le mie superficie invece, indipendentemente da ogni significato fisico, costituiscono il sistema normale di una congruenza di linee, in generale non rette. Per lo studio della geometria differenziale su di queste superficie, seguendo il Burali-Forti, introduco l'omografia vettoriale $\sigma = \frac{dN}{dP}$, in cui N è il vettore unitario tangente alle linee della congruenza, con verso assegnato. Ho potuto così constatare, ed è ciò che qui mi interessa, che la curvatura media e la curvatura totale sono espresse rispettivamente dall'inva-

(1) In una Nota in corso di stampa sul Bollettino dell'Unione matematica italiana.

(2) *Fondamenti per la geometria differenziale su di una superficie col metodo vettoriale generale*, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, tomo XXXIII (1912), pp. 1-40. Nel contesto citerò questa Memoria semplicemente con F. G. Così, dovendosi richiamare spesso l'*Analyse vectorielle générale*, vol. I o II, di C. Burali-Forti ed R. Marcolongo, citerò brevemente A. V. G. I o II.

riante primo e secondo di σ, come aveva trovato il Burali-Forti per il suo caso.

Stabilita pertanto questa più estesa validità dei risultati del Burali-Forti (nn. 1, 2, 3) e messo in rilievo il divario già accennato che caratterizza geometricamente il suo caso dal mio (n. 4), osservo quanto segue. Dal punto di vista vettoriale l'omografia σ del Burali-Forti è una dilatazione (rot $\mathrm{N}=0$); nel mio caso non lo è più e il **rot N**, non più nullo, è un vettore parallelo alla binormale alle linee della congruenza, con modulo eguale alla flessione delle linee stesse.

Passo quindi a considerare (n. 5) le superficie di Bernoulli, assegnandone le curvature media e totale in funzione della velocità **v** del fluido e (n. 6) le superficie che sono normali alle linee di flusso. Queste superficie esistono sempre se il moto è irrotazionale; se il moto è rotazionale, esistono solo se il rot **v** è normale a **v**; si tratta allora di superficie vorticose. Notevole poi la circostanza che, se il fluido è incomprimibile e le linee di flusso sono isotachie, le superficie sono di area minima.

1. Sia assegnato in modo univoco e continuo un vettore unitario N, funzione dei punti P di una regione S dello spazio, tale che

$$\mathrm{N} \times \operatorname{rot} \mathrm{N} = 0 . \tag{1}$$

È questa la condizione caratteristica affinchè la congruenza delle linee l d'azione di N ammetta un sistema normale di superficie Σ [1]. Esistono allora infatti dei numeri m ed f, funzioni di P, tali che (A. V. G. I, 62)

$$\mathrm{N} = m \operatorname{grad} f .$$

Manifestamente quindi le superficie di equazione $f=$ costante costituiscono il sistema normale delle Σ.

Siano **x** ed **y** due vettori unitari tangenti a Σ in P, comunque scelti, purchè la terna **x**, **y**, N risulti ortogonale sinistrorsa.

Introducendo l'omografia

$$\sigma = \frac{d\mathrm{N}}{d\mathrm{P}} ,$$

la *curvatura normale*, la *torsione geodetica* di Σ nel punto P, secondo **x** e secondo **y**, sono (F. G. 18) rispettivamente i numeri reali

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}_x = \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{x} , \\ \mathrm{T}_x = \mathbf{y} \times \sigma \mathbf{x} ; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{A}_y = \mathbf{y} \times \sigma \mathbf{y} , \\ \mathrm{T}_y = - \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{y} . \end{array}\right. \tag{2}$$

Da queste, per la (1), segue immediatamente il teorema di Bonnet:

$$\mathrm{T}_x + \mathrm{T}_y = 0 . \tag{3}$$

[1] Cfr. L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, 3ª ediz., Pisa (1923), vol. II, parte prima, § 358.

Infatti (A. V G. I, 15) si ha

$$\mathbf{y} \times \sigma \mathbf{x} = \mathbf{x} \times K\sigma \mathbf{y} = \mathbf{x} \times \{\sigma \mathbf{y} + \mathbf{y} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{N}\} = \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{y} + \mathbf{N} \times \operatorname{rot} \mathbf{N},$$

e, per la (1),

$$\mathbf{y} \times \sigma \mathbf{x} = \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{y},$$

per la quale, dalle espressioni di T_x e T_y delle (2), segue la (3).

2. Curvatura media. — La curvatura media di una Σ in un suo punto P è definita da $H = A_x + A_y$.

Per le (2) risulta

$$H = \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{x} + \mathbf{y} \times \sigma \mathbf{y}.$$

Notiamo ora che, poichè $\mathbf{N}$ è un vettore unitario,

$$\mathbf{N} \times \sigma \mathbf{v} = 0, \tag{4}$$

qualunque sia il vettore $\mathbf{v}$; l'omografia σ pertanto è degenere, trasformando essa qualsiasi vettore in un vettore normale ad $\mathbf{N}$. In seguito a ciò, nella espressione dell'invariante primo di σ (A. V. G. I, 8, [1])

$$I_1 \sigma = \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{x} + \mathbf{y} \times \sigma \mathbf{y} + \mathbf{N} \times \sigma \mathbf{N},$$

sparisce l'ultimo termine. Ne risulta

$$H = I_1 \sigma = \operatorname{div} \mathbf{N}: \tag{5}$$

la curvatura media è espressa dall' invariante primo di σ.

3. Curvatura totale. — La curvatura totale di una Σ in un suo punto P è definita da $K = A_x A_y - T_x^2$.

Per le (2) risulta

$$K = \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \times \sigma \mathbf{y} - \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \times \sigma \mathbf{x}.$$

Esprimiamo ora l' invariante secondo di σ (A. V. G. I, 8 [1]):

$$I_2 \sigma = \sigma \mathbf{x} \wedge \sigma \mathbf{y} \times \mathbf{N} + \sigma \mathbf{y} \wedge \sigma \mathbf{N} \times \mathbf{x} + \sigma \mathbf{N} \wedge \sigma \mathbf{x} \times \mathbf{y}.$$

Essendo $\mathbf{N} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$, $\mathbf{x} = \mathbf{y} \wedge \mathbf{N}$, $\mathbf{y} = \mathbf{N} \wedge \mathbf{x}$, tenendo conto della (4), otteniamo successivamente:

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{x} \wedge \sigma \mathbf{y} \times \mathbf{N} &= (\sigma \mathbf{x} \wedge \sigma \mathbf{y}) \times \mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = (\sigma \mathbf{x} \wedge \sigma \mathbf{y}) \wedge \mathbf{x} \times \mathbf{y} = \\ &= \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \times \sigma \mathbf{y} - \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} \times \sigma \mathbf{x} = K, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{y} \wedge \sigma \mathbf{N} \times \mathbf{x} &= (\sigma \mathbf{y} \wedge \sigma \mathbf{N}) \times \mathbf{y} \wedge \mathbf{N} = (\sigma \mathbf{y} \wedge \sigma \mathbf{N}) \wedge \mathbf{y} \times \mathbf{N} = \\ &= \mathbf{y} \times \sigma \mathbf{y} \cdot \mathbf{N} \times \sigma \mathbf{N} - \mathbf{y} \times \sigma \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} \times \sigma \mathbf{y} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{N} \wedge \sigma \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= (\sigma \mathbf{N} \wedge \sigma \mathbf{x}) \times \mathbf{N} \wedge \mathbf{x} = (\sigma \mathbf{N} \wedge \sigma \mathbf{x}) \wedge \mathbf{N} \times \mathbf{x} = \\ &= \mathbf{N} \times \sigma \mathbf{N} \cdot \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{x} - \mathbf{N} \times \sigma \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \times \sigma \mathbf{N} = 0. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi

(6) $$K = I_2 \sigma :$$

la curvatura totale è espressa dall'invariante secondo di σ.

Le notevoli e semplici espressioni (5) e (6) delle curvature media e totale di una superficie Σ ne mettono in evidenza il carattere invariantivo. Le stesse espressioni aveva trovato il Burali-Forti nel suo caso [F. G. 20, (2) e (3)], che pertanto continuano a sussistere anche nel caso attuale.

4. Per mettere in evidenza il divario tra il caso da me considerato e quello del Burali-Forti, basta esaminare l'omografia σ, che ha una importanza essenziale in questo studio. Poichè $\mathbf{N}$ è un vettore unitario, risulta (A. V. G. I, 47)

$$\sigma \mathbf{N} = \frac{d\mathbf{N}}{d\mathrm{P}} \mathbf{N} = -\mathbf{N} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{N} .$$

Questo vettore si annulla, per la (1), solamente quando è $\operatorname{rot} \mathbf{N} = 0$, come appunto si verifica in F. G., dove l'omografia σ è una dilatazione. Ma l'annullarsi di $\sigma \mathbf{N}$, e cioè della derivata di $\mathbf{N}$ secondo lo stesso $\mathbf{N}$, significa che $\mathbf{N}$ è costante lungo la propria retta d'azione, per cui le linee l della congruenza individuata da $\mathbf{N}$ sono rette. In tal caso è identicamente soddisfatta la (1); quindi una congruenza di rette ammette sempre, come del resto è ben noto, un sistema normale di superficie. Il Burali-Forti considera, in sostanza, una delle superficie del sistema normale di superficie della congruenza delle rette normali alla superficie stessa. Nel caso attuale, supposto che non sia identicamente $\operatorname{rot} \mathbf{N} = 0$, si ha una congruenza di curve ed è facile di mettere in evidenza il notevole significato geometrico di $\sigma \mathbf{N}$. Se indichiamo con $\mathbf{n}$ il vettore unitario normale principale alla linea l, nel generico punto P, per la prima delle note formule di Frenet, è

$$\sigma \mathbf{N} = \frac{1}{\varrho} \mathbf{n} ,$$

in cui $\frac{1}{\varrho}$ è la flessione di l in P, flessione che è nulla nel caso di Burali-Forti. Ne segue

$$\frac{1}{\varrho} = \operatorname{mod} \sigma \mathbf{N} = \operatorname{mod} (\mathbf{N} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{N}) = \operatorname{mod} \operatorname{rot} \mathbf{N}$$

perchè $\mathbf{N}$ e $\operatorname{rot} \mathbf{N}$, per la (1), sono normali tra loro e $\varrho \operatorname{rot} \mathbf{N}$ è il vettore unitario $\mathbf{b}$, binormale alla linea l.

5. Mi limito ad esporre qui soltanto questi risultati salienti, accennando che da uno studio più dettagliato risulterebbe che quasi tutti i risultati trovati dal Burali-Forti continuano a sussistere nella stessa forma anche nel caso più generale. Desidero però di far notare l'importanza del metodo non solo per lo studio generico di queste superficie, ma altresì per la ricerca di proprietà geometriche di campi vettoriali, rappresentanti grandezze meccaniche o fisiche, ad es. di campi di forza o di velocità.

Fra questi ultimi considero qui il campo della velocità $\mathbf{v}$ di un fluido in moto, soddisfacente alla condizione, indicata inizialmente,

$$\mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{w} = \operatorname{grad} \Phi \,,$$

dove Φ è il trinomio di Bernoulli. Se assumiamo

$$\mathrm{N} = \frac{\mathbf{w}}{\operatorname{mod} \mathbf{w}} = \frac{\mathbf{w}}{w} \,,$$

risulta, per la precedente, $\mathrm{N} \times \operatorname{rot} \mathrm{N} = 0$, con che è soddisfatta la (1). La congruenza delle linee l ammette quindi un sistema normale di superficie, le *superficie di Bernoulli*. Per queste superficie, in base alle (5) e (6), è (A. V. G. 41 e 42)

$$\mathrm{H} = \operatorname{div} \frac{\mathbf{w}}{w} = \frac{1}{w} \left\{ (\operatorname{rot} \mathbf{v})^2 - v \times \operatorname{rot}^2 \mathbf{v} \right\} - \frac{1}{w^2} (\operatorname{grad} w) \times \mathbf{w} \,,$$

$$\mathrm{K} = \mathrm{I}_2 \frac{d}{d\mathrm{P}} \left(\frac{\mathbf{w}}{w} \right) = \mathrm{H}^2 + \frac{\mathbf{w}}{w} \times \operatorname{grad} \mathrm{H} + \operatorname{div} \operatorname{Grad} \log w \,,$$

dove con Grad si intende il gradiente superficiale (F. G. 10).

6. Se assumiamo invece

$$\mathrm{N} = \frac{\mathbf{v}}{\operatorname{mod} \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{v} \,,$$

la congruenza di linee l, linee di flusso, ammette un sistema normale di superficie, per la (1), quando (A. V. G. I, 41, [2]) è $\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$, cioè quando il moto è irrotazionale oppure, se il moto è rotazionale, quando $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ è normale a $\mathbf{v}$. Nel primo caso la velocità ammette un potenziale cinetico e le superficie sono le superficie equipotenziali, come è ben noto. Nel secondo caso le superficie normali alle linee di flusso sono necessariamente superficie vorticose. Supposto incomprimibile il fluido ($\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$) per la (5) la curvatura media di queste superficie è

$$\mathrm{H} = \operatorname{div} \frac{\mathbf{v}}{v} = - \frac{\partial \log v}{\partial s} \,,$$

ove con s si indica l'arco misurato sulla generica linea di flusso nel senso del moto. *Se v è costante su ciascuna linea di flusso, la curvatura media è dovunque nulla.* Si tratta di un sistema di superficie di *area minima.*