ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE DI SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1924.

(Ogni Memoria e Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Sulle varietà a invarianti principali eguali.* Nota del Socio G. Ricci-Curbastro [1].

In una Nota inserita negli *Atti del R. Istituto veneto di scienze lettere ed arti* (anno 1904) estesi alle varietà riemanniane di quante si vogliano dimensioni i concetti di linee di curvatura e di curvature principali già fissati per le V_3.

Essendo

$$\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{rs} a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

la espressione del ds^2 di una V_n riemanniana ed $a_{pr,qs}$ i coefficienti della nota forma covariante quadrilineare di Riemann ad essa relativi, si consideri assieme con φ la quadrica covariante [2]

$$\psi = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \alpha_{rs}\, dx_r\, dx_s\,,$$

posto

$$\alpha_{rs} = \sum_{1}^{n}{}_{pq} a^{(pq)} a_{pr,qs}\,;$$

si riducano simultaneamente φ e ψ alle espressioni

$$\varphi = \sum_{1}^{n}{}_{i} \varphi_i^2 \qquad \psi = \sum_{1}^{n} \varrho_i\, \varphi_i^2\,,$$

(1) Presentata nella seduta del 15 giugno 1924.

(2) Il sig. L. P. Eisenhart, in una Nota pubblicata nei « Proceedings of the national Academy of sciences » (febbraio 1922), mise in rilievo l'intimo legame di questa forma col tensore gravitazionale di Einstein.

essendo

$$\varphi_i = \sum_1^n {}_r \lambda_{i/r} \, dx_r .$$

Gli elementi $\lambda_i^{(r)}$ del determinante reciproco del determinante

$$\Lambda \equiv (\lambda_{1/1} \, \lambda_{2/2} \dots \lambda_{n/n})$$

(cioè i complementi algebrici delle $\lambda_{i/r}$ divisi per Λ) forniscono i parametri di direzione (*sistemi coordinati controvarianti*) delle *congruenze principali* $[i]$ (che, per $n = 3$, coincidono con quelle delle linee di curvatura della varietà), mentre ogni *invariante principale* ϱ_i rappresenta la somma delle curvature riemanniane relative alle $n-1$ giaciture piane principali, che contengono la direzione $[i]$.

Ritorno ora sull'argomento per dimostrare un teorema, che per le V_3 si confonde con un ben noto teorema fondamentale di Schur, e per $n > 3$ lo contiene come corollario.

Dalle (1), per derivazione covariante secondo φ, seguono le

$$\alpha_{rst} = \sum_1^n {}_{pq} \, a^{(pq)} \, a_{pr\,,\,qst} \text{ (}^1\text{)},$$

alle quali, per le identità differenziali

$$a_{pr\,,\,qst} + a_{pr\,,\,tqs} = a_{pr\,,\,stq} = 0 ,$$

si possono sostituire le

$$\alpha_{rst} = \sum_1^n {}_{pq} \, a^{(p,q)} \, (a_{pr\,,\,qts} + a_{rs\,,\,stq}).$$

Da queste seguono poi le

$$\alpha_{rst} = \alpha_{rts} + \sum_1^n {}_{pq} \, a^{(pq)} \, a_{rp\,\cdot\,stq}$$

e quindi le

$$\sum\nolimits_{rs} a^{(rs)} \, \alpha_{rst} = 2 \sum\nolimits_{rs} a^{(rs)} \, , \alpha_{rts} . \tag{2}$$

Siano $\varrho_1 = \varrho_2 = \dots = \varrho_n = \varrho$. Varranno le $\alpha_{rs} = \varrho \, a_{rs}$ e quindi le

$$\alpha_{rst} = \varrho_t \, a_{rs} ,$$

e le (2) assumeranno la forma

$$(n-2) \, K_t = 0 ,$$

cioè, per $n > 2$, $K_t = 0$. Concludiamo che:

« Se gli invarianti principali di una V sono eguali, il loro valore « comune è costante ».

(1) Queste relazioni furono da me comunicate al compianto prof. Ernesto Padova, che le fece conoscere in una Nota *Sulle deformazioni infinitesime*, pubblicata in questi Rendiconti (seduta del 3 febbraio 1889). Il prof. Bianchi, che non avvertì la cosa perchè confinata in una postilla in margine alla suddetta Nota, giunse per suo conto alle stesse relazioni e, in un corso di lezioni tenuto nel 1901, le espose e se ne valse per dimostrare il noto importantissimo teorema di Schur contenuto in quello, che forma oggetto di questa Nota; e le pubblicò poi in questi stessi Rendiconti (seduta del 5 gennaio 1902).

Aggiungo che dopo avere presentato alla R. Accademia questo lavoro, ho rilevato che il teorema, che ne forma l'oggetto, è già stato dimostrato dal prof. Bompiani.