ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Meccanica. — *Sistemi rombici, uniformemente rotanti, nella dinamica elettronica.* Nota di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Il modello che fu proposto dal Bohr per la molecola (neutra) dell'idrogeno [1] rappresenta un sistema rombico dotato di movimento rotatorio uniforme, ma col piano di esso rombo passante per l'asse di rotazione (due punti-agenti trovandosi sull'asse in discorso). Noi qui vogliamo invece mostrare la esistenza e la costruzione di sistemi rombici uniformemente rotanti (anch'essi di Rutherford-Bohr), ognuno situato in un piano normale al proprio asse di rotazione.

Nel nostro caso, le fondamentali equazioni del moto sono

$$(1)\qquad \begin{cases} -\omega^2 m_h a_h + e_h \sum\limits_s e_s (a_h - a_s)\, \varphi_{hs} = 0 \\ -\omega^2 m_h b_h + e_h \sum\limits_s e_s (b_h - b_s)\, \varphi_{hs} = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} h = 1, 2, 3, 4 \\ s \neq h \end{pmatrix}$$

dove a_h e b_h designano, nel supposto piano normale all'asse di rotazione, le coordinate cartesiane del punto-agente P_h, prese in un riferimento avente l'origine sul predetto asse; mentre gli altri simboli hanno significati veduti nella mia Nota *Sui moti stazionari nella dinamica elettronica* [2].

Per cui, intendendo che $P_1(a, 0)$, $P_2(0, b)$, $P_3(-a, 0)$, $P_4(0, -b)$ siano i vertici del nostro rombo, ed osservando che, ora, $r_{12} = r_{23} = r_{34} = r_{41}$ (senza omettere naturalmente di ritenere le φ quali valori di una medesima funzione univoca), si vede che, dall'insieme delle equazioni seconda, quarta, quinta e settima delle (1), viene $\varphi_{12} = \varphi_{23} = \varphi_{14} = \varphi_{34}$ ed inoltre $e_1 = e_3$, $e_2 = e_4$, e che quindi esse (1) conducono ulteriormente alle uguaglianze $m_1 = m_3$, $m_2 = m_4$. Pertanto, se denotiamo con e ed m, con E ed M, rispettivamente la carica e la massa sopra ognuno dei vertici P_1 e P_3 e quelle su P_2 e P_4, le (1) si riducono alle due seguenti:

$$(2)\qquad \begin{cases} -m\omega^2 + 2e\,(E\varphi_{12} + e\,\varphi_{13}) = 0 \\ -M\omega^2 + 2E(e\,\varphi_{12} + E\varphi_{24}) = 0\,. \end{cases}$$

[1] Come rileva il Sommerfeld nella sua opera *Atombau und Spektrallinien*, cotesto modello, sebbene non ancora sostituito con altro fisicamente migliore, non offre più, nei riguardi fisici, se non un interesse storico.

[2] Vedansi questi Rendiconti, 2° sem., pag. 238.

D'altra parte, se il valore comune delle $\varphi_{12}, \varphi_{23}, \varphi_{14}, \varphi_{34}$ fosse negativo, le quattro cariche sarebbero tutte della stessa specie di elettricità, per cui tutte le φ sarebbero allora negative; ciò è incompatibile con le (2). Ne consegue che, sopra ogni singola coppia di vertici opposti, avremo una medesima specie di elettricità, ma la specie inerente ad una di coteste coppie sarà contraria a quella della rimanente.

Sistemi neutri. — Ove si ponga $e = \mathrm{E}$, le (2) diventano

$$m\omega^2 = 2e^2(\varphi_{12} + \varphi_{13}) \quad , \quad \mathrm{M}\omega^2 = 2e^2(\varphi_{12} + \varphi_{24})\,;$$

poi, supponendo coulombiana la legge delle mutue attrazioni e repulsioni, avremo

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} m\omega^2 &= 2e^2\left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right) \\ \mathrm{M}\omega^2 &= 2e^2\left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{24}^3}\right) \end{aligned} \right.$$

Per cui si vede, intanto, essere necessario che si abbia $r_{13} > r_{12}$, $r_{24} > r_{12}$; ciò (assumendo a e b con segni fra loro eguali) equivale a dire

$$\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{b}{a} < \sqrt{3}\,.$$

Questa condizione, come risulterà tosto, è anche sufficiente per la esistenza dei nostri sistemi rombici [1]. Dalle (3) segue

$$\frac{m}{\mathrm{M}} = \frac{1 - \left(\dfrac{r_{12}}{r_{13}}\right)^3}{1 - \left(\dfrac{r_{12}}{r_{24}}\right)^3}\,,$$

cioè

$$(4) \qquad \frac{m}{\mathrm{M}} = \frac{8 - \sqrt{(1+\nu^2)^3}}{8 - \sqrt{\left(1 + \dfrac{1}{\nu^2}\right)^3}}\,,$$

dove $\nu = \dfrac{b}{a}$. La funzione

$$\eta = \frac{8 - \sqrt{(1+\xi^2)^3}}{8 - \sqrt{\left(1 + \dfrac{1}{\xi^2}\right)^3}} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{3}} < \xi < \sqrt{3}\right)$$

[1] Invece — giova incidentemente notarlo — nei sistemi rombici dell'altro tipo, cui abbiamo superiormente alluso (sistemi rombici, dei quali ciascuno trovasi situato in un piano passante per il proprio asse di rotazione), il rapporto fra una delle diagonali (la maggiore) e l'altra eguaglia $\sqrt{3}$ (vedasi nell'opera del Sommerfeld, già citata, il paragrafo « Einfachste Beispiele von Atommodellen ».

decresce ovunque, col crescere del suo argomento (argomento positivo, che abbiamo denotato con ξ); ne consegue che ad un valore di η (la quale η ha, come campo di variabilità, l'intervallo $\overline{0\,,\,+\infty}$) corrisponde un solo valore della variabile ξ $\left(\text{variabile, questa, compresa fra } \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ e } \sqrt{3}\right)$; sicchè ad un rapporto $\frac{m}{\mathrm{M}}$ corrisponde sempre uno ed un solo rapporto $\frac{b}{a}$.

Stante la (4), non ometteremo di osservare che, per $m \lesseqgtr \mathrm{M}$, si ha rispettivamente $b \gtreqless a$; perciò, se $m \neq \mathrm{M}$, avremo che la massa, da cui sono affètti gli estremi della diagonale *maggiore*, supera quella inerente agli estremi dell'altra diagonale [1].

È lecito chiedersi se un modello della molecola (neutra) dell'idrogeno potrebbe appartenere al tipo di sistemi ora trovati in questa Nota. Giova pertanto infine notare, se non altro, come, introdotta la *condizione quantica* del Bohr e supposti assegnati m, M ed e, potremo dapprima ricavare a e b dal sistema che si ottiene accoppiando la predetta condizione del Bohr con la equazione $b = \nu a$, ove si pensi (almeno astraendo da difficoltà di calcolo) ottenuta ν dalla (4); poi, dopo calcolati in conseguenza $r_{12} = \sqrt{a^2 + b^2}$, $r_{13} = 2a$, $r_{24} = 2b$, avere ω dalla equazione in cui si trasforma una delle (3) eseguendovi le opportune sostituzioni.

Caso generale. — Rimanendo nella ipotesi della legge coulombiana relativa alle attrazioni e repulsioni, e denotando con k il rapporto $\frac{e}{\mathrm{E}}$, le (2) diventano

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{m\omega^2}{e^2} &= 2\left(\frac{1}{kr_{12}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right) \\ \frac{\mathrm{M}\omega^2}{\mathrm{E}^2} &= 2\left(\frac{k}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{24}^3}\right). \end{aligned}\right.$$

Queste equazioni richiedono le diseguaglianze

$$r_{13}^3 > kr_{12}^3 \quad , \quad k r_{24}^3 > r_{12}^3 ,$$

cioè

$$\frac{1}{4\,k^{\frac{2}{3}} - 1} < \left(\frac{b}{a}\right)^2 < \frac{4 - k^{\frac{2}{3}}}{k^{\frac{2}{3}}} ;$$

[1] Nel caso analogo dell'*ordinario* problema (sistemi rombici di quattro corpi) invece della relazione (4) da noi trovata, sussiste (vedasi R. Longley, Bulletin of the American Mathematical Society, 1907, pag. 324) la relazione che si ottiene dalla (4) invertendovi la frazione che figura a primo membro; per cui allora, se le due diagonali sono fra loro diseguali, la massa, da cui sono affètti gli estremi della diagonale *minore*, supera quella inerente agli estremi dell'altra diagonale.

diseguaglianze che implicano $k^{\frac{2}{3}}$ compreso fra $2-\sqrt{3}$ e $2+\sqrt{3}$, vale a dire fra $2-\sqrt{3}$ ed $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$; per cui, nei riguardi di valori di k, i quali siano del tipo $\frac{1}{n}$, oppure del tipo n, con n intero, potremo attribuire ad n i soli valori *dall'uno al sette* (questi estremi inclusi).

Dalle (5) segue

$$\frac{m}{\mathrm{M}} = k \frac{1-k\left(\frac{r_{12}}{r_{13}}\right)^3}{k-\left(\frac{r_{12}}{r_{24}}\right)^3}$$

ossia

$$\frac{m}{\mathrm{M}} = k \frac{8-k\sqrt{(1+\nu^2)^3}}{8k-\sqrt{\left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)^3}} \qquad \left(\nu = \frac{b}{a}\right).$$

Ciò premesso, omettendo una discussione ormai chiara, ci limiteremo ad osservare che ad $\frac{m}{\mathrm{M}} \lesseqgtr 1$ corrisponde $\nu k^{\frac{2}{3}} \gtreqless 1$.

Per k diverso dall'unità, avremo a che fare, com'è naturale, con sistemi ionizzati (parzialmente ionizzati).

Relatività. — *Intorno alla teoria dei campi einsteiniani a simmetria assiale.* Nota di PAOLO STRANEO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

SCOPO DI QUESTA NOTA. — **1**. In un notevole lavoro sulla gravitazione einsteiniana nel vol. 54° degli *Annalen der Physik* (1917) H. Weyl studiò i campi gravitazionali quando, oltre quella della *staticità*, sia verificata la condizione della *simmetria intorno ad un asse*. In tale studio furono considerate principalmente equazioni gravitazionali a tensore energetico nullo e, solo eccezionalmente, equazioni in cui interveniva un tensore dovuto a cariche elettriche; ma ciò con varie restrizioni, tanto che, all'atto pratico, si può ritenere lo studio limitato essenzialmente alle *equazioni gravitazionali a tensore energetico nullo*.

Il risultato principale di questo lavoro consisteva nell'aver posto in evidenza una correlazione biunivoca tra ciascuna soluzione simmetrica delle equazioni einsteiniane nello spazio fisico e una determinata soluzione del-

[1] Pervenuta all'Accademia il 31 ottobre 1924.