ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

diseguaglianze che implicano $k^{\frac{2}{3}}$ compreso fra $2-\sqrt{3}$ e $2+\sqrt{3}$, vale a dire fra $2-\sqrt{3}$ ed $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$; per cui, nei riguardi di valori di k, i quali siano del tipo $\frac{1}{n}$, oppure del tipo n, con n intero, potremo attribuire ad n i soli valori *dall'uno al sette* (questi estremi inclusi).

Dalle (5) segue

$$\frac{m}{M}=k\,\frac{1-k\left(\frac{r_{12}}{r_{13}}\right)^3}{k-\left(\frac{r_{12}}{r_{24}}\right)^3}$$

ossia

$$\frac{m}{M}=k\,\frac{8-k\sqrt{(1+\nu^2)^3}}{8k-\sqrt{\left(1+\frac{1}{\nu^2}\right)^3}} \qquad \left(\nu=\frac{b}{a}\right).$$

Ciò premesso, omettendo una discussione ormai chiara, ci limiteremo ad osservare che ad $\frac{m}{M}\lesseqqgtr 1$ corrisponde $\nu k^{\frac{2}{3}}\gtreqqless 1$.

Per k diverso dall'unità, avremo a che fare, com'è naturale, con sistemi ionizzati (parzialmente ionizzati).

Relatività. — *Intorno alla teoria dei campi einsteiniani a simmetria assiale.* Nota di PAOLO STRANEO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

SCOPO DI QUESTA NOTA. — **1**. In un notevole lavoro sulla gravitazione einsteiniana nel vol. 54° degli *Annalen der Physik* (1917) H. Weyl studiò i campi gravitazionali quando, oltre quella della *staticità*, sia verificata la condizione della *simmetria intorno ad un asse.* In tale studio furono considerate principalmente equazioni gravitazionali a tensore energetico nullo e, solo eccezionalmente, equazioni in cui interveniva un tensore dovuto a cariche elettriche; ma ciò con varie restrizioni, tanto che, all'atto pratico, si può ritenere lo studio limitato essenzialmente alle *equazioni gravitazionali a tensore energetico nullo.*

Il risultato principale di questo lavoro consisteva nell'aver posto in evidenza una correlazione biunivoca tra ciascuna soluzione simmetrica delle equazioni einsteiniane nello spazio fisico e una determinata soluzione del-

[1] Pervenuta all'Accademia il 31 ottobre 1924.

l'equazione degli ordinari potenziali simmetrici in uno spazio euclideo ausiliario e viceversa.

In principio del 1919 il prof. Levi-Civita perfezionò in un punto fondamentale la teoria del Weyl (vol. XXVIII, 1° sem. di questi Rend.), così che risultò definitivamente stabilito che, partendo da una qualsiasi espressione di un potenziale simmetrico, si può sempre costruire un ds^2 soddisfacente alle equazioni gravitazionali a tensore energetico nullo, mediante semplici operazioni di quadratura.

L'applicazione di questo risultato formale alla concreta determinazione del campo di una distribuzione simmetrica di masse, arbitrariamente date nello spazio fisico, presenta però una notevole difficoltà, dovuta al non conoscere *a priori* da quale espressione di potenziale newtoniano si debba formalmente partire; o più fisicamente, dal non conoscere la distribuzione *fittizia* di masse che, nello spazio euclideo ausiliario, corrisponde alla distribuzione *reale* dello spazio fisico. Il Weyl aveva rilevata, ma non risolta questa difficoltà; però, trattando colla sua teoria il già noto caso del punto materiale, egli aveva fornito un esempio molto istruttivo delle sensibilissime differenze che possono verificarsi fra quelle due distribuzioni.

2. Convinto che per applicare razionalmente la teoria precedente occorresse anzitutto rendersi perfettamente ragione della natura della correlazione che deve esistere fra le due distribuzioni, studiai la questione fin dal 1921 e giunsi ad un criterio che mi permise di calcolare una serie di ds^2, che avrebbero dovuto corrispondere ai campi gravitazionali di masse localizzate rispettivamente in due centri fissi, su di un ellissoide, su di un segmento, su di un disco, su di un anello, ecc. ecc.

Se non che, considerando la questione con criterio fisico e non più puramente formale, ben presto mi avvidi di una nuova, fin allora inavvertita difficoltà, la quale, pur lasciando a quei risultati il loro indiscutibile valore di soluzioni formali delle equazioni gravitazionali, toglieva inesorabilmente loro quello di risoluzioni esatte di possibili problemi fisici.

Sorvolando ora, per ragioni di spazio, sui particolari di questa difficoltà, dirò semplicemente che essa raggiunge le basi più profonde della teoria e non può venir eliminata, se non estendendo la teoria stessa alle equazioni einsteiniane a tensore energetico non nullo; e che chi credesse di poter risolvere problemi fisici concreti, senza tener conto di questa difficoltà, commetterebbe in generale un grossolano errore, dell'ordine di quello che, nella fisica classica, commetterebbe chi integrasse l'equazione di Laplace per risolvere un problema che richiedesse invece l'integrazione di un'equazione di Poisson.

Da allora mi occupai ad intervalli di questa necessaria estensione della teoria del Weyl e spero di poter presto comunicare soddisfacenti risultati.

3. Ma frattanto mi permetto di esporre brevemente le considerazioni che mi avevano guidato nel dedurre, *in forma assolutamente rigorosa* **in qualche caso**, *in forma estremamente approssimata* **sempre** la correlazione che deve sussistere fra le due distribuzioni di masse, correlazione che costituisce la vera base formale della teoria.

Mi sono indotto a ciò per due ragioni.

In primo luogo perchè gli studii fin qui fatti per estendere la teoria alle equazioni con tensore energetico non nullo, mi hanno convinto che non è inutile aver presente le soluzioni più semplici, corrispondenti al caso fin qui considerato, anche se esso ha valore puramente formale.

Poi perchè sono state recentemente pubblicate, e date come soluzioni di problemi concreti, certe espressioni di ds^2 einsteiniani, che non solo urtano contro la su accennata difficoltà, ma contengono pure notevoli incertezze, anche se considerate dal punto di vista puramente formale, incertezze che si sono, per esempio, manifestate evidentissime in una lunga discussione su certi ds^2, sostanzialmente differenti fra di loro, e che vari autori hanno invece dato come espressioni di uno stesso campo einsteiniano, senza che si sia potuto precisare quale sia la vera portata e la vera cagione di quelle loro differenze. Ora tutta la complessa questione si presenta invece perfettamente chiara quando si tenga in debito conto la correlazione fra le due distribuzioni di masse.

In questa Nota esaurirò la parte generale della questione, riservandomi di dare in seguito esempi di applicazioni e di discutere i risultati fin qui dedotti dai varii autori.

Breve richiamo della teoria. — 4. Come abbiamo già detto, il prof Levi-Civita applicò al caso della simmetria assiale il criterio che aveva costantemente seguito nei suoi studi sui ds^2 einsteniani, criterio che in fondo consisteva nel modificare opportunamente la forma fondamentale cui erano riferite le equazioni gravitazionali fino a che queste assumessero forme interpretabili nello spazio euclideo e facilmente integrabili. Noi seguiremo precisamente quella via.

Ammettiamo, come è evidentemente lecito, che nel caso che ci interessa il ds^2 debba poter assumere la forma;

$$[1] \qquad ds^2 = V_0^2 e^{2\nu} dt^2 - e^{-2\nu} (d\sigma^2 + r^2 d\varphi^2)$$

coll'elemento lineare binario $d\sigma^2$ e le funzioni ν ed r dipendenti dalle sole variabili x_1 e x_2. Tenendo conto che, come facilmente si dimostra, le equazioni einsteiniane esigono che la r sia una funzione armonica, per l'assunzione [1] le equazioni stesse prendono la forma semplice data dalle equazioni [13], [14] e [15] della citata Nota del Levi-Civita, ove i coefficienti e tutti gli elementi invarianti e covarianti si intendono riferiti al $d\sigma^2$ binario.

Inoltre, dato che, come è notissimo, ogni elemento lineare binario può esser posto sotto la forma $d\sigma^2 = e^{2\lambda}\, d\sigma_0^2$, ove $d\sigma_0^2$ rappresenta un elemento lineare euclideo, dovrà ancor esser possibile esprimere le equazioni gravitazionali con riferimento ad un $d\sigma_0^2$ euclideo. Ciò appunto viene fatto per mezzo delle equazioni [13'], [14'] e [15'] della Nota del Levi-Civita.

$$[13'] \qquad \Delta_2 \nu + \frac{1}{r} \nabla (r, \nu) = 0 \qquad\qquad [14'] \qquad \Delta_2 \lambda = \Delta \nu$$

$$[15'] \qquad \frac{r_{ik}}{r} - \frac{r_i}{r} \lambda_k - \frac{r_k}{r} \lambda_i + 2\nu_i \nu_k - a_{ik} \left[\Delta \nu - \frac{1}{r} \nabla (r, \lambda) \right] = 0$$

Le variabili indipendenti x_1, x_2 nel $d\sigma_0^2$ sono ancora perfettamente generali.

È a questo punto che per agevolare l'integrazione si introduce una notevole particolarizzazione di esse. Osserviamo che per l'armonicità della funzione r e la conseguente esistenza di una funzione associata z, indipendente da essa e parimenti armonica, il $d\sigma^2$ deve pur poter assumere la forma isometrica $d\sigma^2 = e^{2\lambda} (dr^2 + dz^2)$.

Appare allora senz'altro opportuno sostituire le coordinate generali x_1 e x_2 colle coordinate cartesiane r e z, con che le equazioni einsteiniane si semplificano ancora notevolmente, e il ds^2 quadridimensionale assume la forma canonica di Weyl:

$$[2] \qquad ds^2 = V_0^2 e^{2\nu} dt^2 - e^{-2\nu} [e^{2\lambda} (dr^2 + dz^2) + r^2 d\varphi^2].$$

La prima delle equazioni einsteiniane si riduce infatti all'equazione dei potenziali simmetrici

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} = 0 \qquad [20 \text{ di L-C}]$$

la quale definisce la funzione ν. Le altre si compendiano tutte nell'equazione ai differenziali totali:

$$d\lambda = r \left[\left(\frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 - \left(\frac{\partial \nu}{\partial z} \right)^2 \right] dr + 2r \frac{\partial \nu}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial z} dz \qquad [21' \text{ di L-C}]$$

che definisce la funzione λ in funzione di ogni soluzione ν dell'equazione precedente.

Ne segue che, partendo da una soluzione qualsiasi ν, con una semplice quadratura, si può calcolare λ e quindi possedere tutti gli elementi necessari per costruire un ds^2 einsteiniano statico secondo la [2].

Interpretazione fisica. — 5. L'interpretazione *a posteriori* di una soluzione formale costrutta secondo la teoria precedente, non presenta d'ordinario gravi difficoltà. Basta in generale analizzare il ds^2 e dedurre la distribuzione delle masse gravitanti nello spazio fisico in base alle singolarità che presenta il ds^2 stesso.

Incomparabilmente più difficile è invece risolvere il problema inverso della ricerca di un potenziale simmetrico ν, corrispondente ad una distribuzione di masse data *a priori* nello spazio fisico. Per risolverlo è necessario considerare esattamente il senso geometrico e fisico delle successive trasformazioni che, nella teoria formale, sono state conglobate ed espresse nell'unica equazione $d\sigma^2 = e^{2\lambda}(dr^2 + dz^2)$.

Occorre per ciò tener presente che varie trasformazioni geometriche di indole differente, con ripercussioni fisiche talvolta differentissime, si esprimono appunto formalmente mediante un'equazione di quello stesso tipo. Basti come esempio ricordare i cangiamenti isometrici delle variabili indipendenti, che, come tutti i semplici cangiamenti di variabili o di coordinate, non alterano mai l'aspetto delle figure e nel nostro caso la distribuzione delle masse, e le rappresentazioni conformi di una superficie su di un'altra superficie o su di un piano, o anche di un piano su se stesso, che tale aspetto e tali distribuzioni possono talvolta alterare anche notevolmente.

6. Consideriamo perciò una distribuzione di masse nello spazio fisico, simmetrico intorno ad un asse e, per avvicinarci il più possibile al caso che nella fisica classica corrisponde a masse localizzate in punti, linee e superficie geometriche, supponiamole distese, colla massima concentrazione teoricamente possibile su sferette, tubetti e superficie doppie, che, come è noto, pur potendo esser di diametri e spessori piccolissimi rispetto all'entità delle masse, non potranno però mai ridursi rigorosamente ai predetti enti geometrici.

Prescindiamo pure dal fatto che, fatta eccezione per il caso di un'unica sferetta e di poche altre distribuzioni, non è possibile che tali masse rimangano statiche senza l'ausilio di qualche vincolo o di forze di coesione, e ammettiamo pure che per esse valgono le equazioni gravitazionali a tensore energetico nullo.

Supponiamo infine che a distanza infinita dall'asse non vi siano masse e, quindi, che colà lo spazio fisico debba esser euclideo.

Consideriamo ora una superficie meridiana σ, ($\varphi = \text{cost.}$) uscente dall'asse in relazione alla precedente equazione [1]. Essa potrà essere più o meno curva in vicinanza delle masse che intersecherà, ma dovrà tendere a divenir sempre più prossima a un piano allontanandosi dall'asse.

Fissiamo ora la nostra attenzione sulla funzione r che appare nella [1]. Abbiamo detto che essa deve esser armonica; per evidenti ragioni geometriche e fisiche essa deve inoltre annullarsi sull'asse.

Ora noi sappiamo che a tale condizione ai limiti soddisfa appunto, sulla superficie $\varphi = \text{cost.}$, la funzione armonica r la quale, eguagliata ad una costante, rappresenta su di essa le linee di un flusso qualsiasi, scorrente da

$+\infty$ a $-\infty$. A questo flusso dobbiamo naturalmente ancora imporre la condizione di non poter penetrare nell'interno delle masse.

Le linee che poi si ottengono ponendo eguale ad una costante la funzione associata z, rappresentano analogamente le linee equipotenziali e formano colle precedenti un sistema isotermo, cui d'ora innanzi ci riferiremo.

A distanza sufficientemente grande dalle masse, cioè ove la superficie σ tende a confondersi con un piano, le linee $r =$ cost. e $z =$ cost. si confondono con le coordinate cartesiane.

7. Ora alla trasformazione complessiva della teoria formale possiamo giungere attraverso alle seguenti trasformazioni intuitive: 1°) *la rappresentazione conforme della superficie* σ, colle rispettive masse e il corrispondente sistema isotermo delle linee r e z, *su di un semipiano*, la quale trasformazione, a distanza infinita, lasci invariate le coordinate cartesiane, e quindi lasci ovunque sussistere la possibilità di interpretare le linee costituenti il nuovo sistema isotermo, come linee di flusso e equipotenziali sul semipiano; 2°) *la rappresentazione conforme del semipiano* così ottenuto colle rispettive masse e il corrispondente sistema isotermo r' e z' *su di un altro semipiano* (o su se stesso), la quale rappresentazione faccia ovunque corrispondere a quest'ultimo sistema isotermo, il sistema delle coordinate cartesiane r_* e z_* che evidentemente, a grande distanza coincideva coi sistemi precedenti r', z' e r, z. Per semplicità in seguito ometteremo l'asterisco $_*$ intendendo però sempre di riferirci al sistema cartesiano r_*, z_*.

8. Con quanto precede è perfettamente conseguito tutto l'effetto della trasformazione, che avevamo espresso analiticamente coll'equazione $d\sigma^2 = e^{2\lambda}(dr^2 + dz^2)$, ma ormai in una forma suscettibile di facile discussione fisica.

La prima di queste trasformazioni, data la condizione che le abbiamo imposta, di essere una *trasformazione identica* nelle regioni in cui le due superficie sono entrambe piane, altera la distribuzione delle masse solamente quanto lo esige il passaggio da una superficie, che in vicinanza delle masse differisce più o meno sensibilmente dal piano, ad una superficie ovunque rigorosamente piana (semipiano); ma non apporta nessuna di quelle deformazioni che inevitabilmente si verificherebbero quando si fosse invece stabilito che i due sistemi isotermi dovessero differire fra di loro anche là ove le due superficie sono identiche.

In altri termini questa trasformazione è caratterizzata dal minimo perturbamento nella distribuzione delle masse, in modo analogo a quanto avviene nella distribuzione delle terre e degli oceani nella consueta rappresentazione di un emisfero terrestre su di un cerchio, mentre, come è noto, si hanno delle perturbazioni rilevantissime con altri sistemi di rappresentazione, per. es. con quello di Mercator, ove esse diventano persino infinite in corrispondenza dei poli.

Vedremo quando tratteremo esempi pratici, che per ovvie ragioni fisiche e di simmetria certe distribuzioni si trasformeranno senz'altro *similmente*, e inoltre che le alterazioni di forma saranno in generale tenuissime.

La seconda trasformazione invece che, ripetiamolo, consiste nel passare sullo stesso semipiano dal sistema isotermo delle linee di flusso e equipotenziali intorno alle masse, al sistema isotermo cartesiano, implica, per le linee in vicinanza delle masse e quindi per le masse stesse, *deformazioni notevoli*. È d'altronde quasi intuitivo che, dato che le linee di flusso dovranno divenir coincidenti colle ordinate cartesiane r, le masse non potranno più rimaner distribuite sul contorno di superficie finite sul semipiano, ma dovranno andarsi a condensare opportunamente su segmenti delle linee z.

Ad ogni modo la trasformazione in questione è di un tipo notissimo e può esser seguìta analiticamente senza difficoltà mediante i principî della teoria delle variabili complesse.

Conclusione. — **9.** Conosciuta così la distribuzione delle masse nel semipiano rappresentativo, o rigorosamente, o almeno con grande approssimazione, basterà dedurne il loro potenziale simmetrico per poter costruire, per mezzo delle formule del Levi-Civita, il ds^2 desiderato. Il quale, a sua volta, corrisponderà al problema propostosi *in qualche caso* **in modo assolutamente rigoroso**, e ***sempre*** **con estrema approssimazione**. La sua analisi *a posteriori*, ormai sempre facilissima, permetterà poi, quando occorra, di determinare il grado di quell'approssimazione.

È così finalmente posto un riparo al pericolo dell'equivoco in cui era estremamente facile cadere, di creder cioè di risolvere un certo problema fisico, mentre invece o se ne risolveva un altro o, peggio, si dava semplicemente una soluzione formale delle equazioni einsteiniane, non corrispondente a nessun problema fisico.

Astronomia. — *Sulle ombre volanti visibili durante le ecclissi solari.* Nota del prof. Guido Horn d'Arturo, presentata dal Socio V. Cerulli [1].

Vedrà la luce nel prossimo numero delle « Memorie della S. A. I. » un mio lavoro sul fenomeno delle cosiddette « ombre volanti »: tenue trama di linee alternativamente chiare e scure, che corrono sulla superficie della terra, negli istanti precedenti e seguenti la totalità dell'ecclisse solare.

Ho esaminato tutto il materiale d'osservazione accumulatosi dal 1842 in poi, e discuto l'ipotesi proposta da più d'un osservatore, secondo cui il fenomeno consisterebbe nelle bande chiare e non nelle scure; queste ultime non sarebbero altro se non lo sfondo continuo, su cui si proiettano le bande

(1) Presentata nella Seduta del 2 novembre 1924.