ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

nord-nord-est sud-sud-ovest, cioè normale alla grande frattura dell'Alpisella per lo scrivente [1], che si occupò quasi esclusivamente della parte Valtellinese, e est-ovest per Spitz e Dyhrenfurth, i quali studiarono a fondo particolarmente l'Engadina [2].

Quelle incertezze, spiegabilissime in quesiti così complessi e poco afferrabili in tutti i loro particolari, non possono però giustificare le opposizioni, talora ostinate, all'accoglimento delle logiche e necessarie deduzioni che si traggono da fatti tangibili e inoppugnabili, anche nei casi in cui le spiegazioni che si cerca di darne appaiano o anche siano realmente insufficienti. In queste questioni bisogna sempre tenere ben distinti i fatti reali ed indiscutibili, dalle spiegazioni che di essi si cerca di dare, le quali possono essere più o meno fallaci.

Sta di fatto che è estremamente difficile il coordinare la tettonica di tutta l'alta Valle Maira con un qualsiasi carreggiamento, di cui il lembo residuale isolato della quota 1840 rappresenti un relitto; siccome però i fatti sono molto chiari e di essi non si vede altra possibile spiegazione, io concludo in favore di tale ipotesi.

La campagna geologica della scorsa estate, svoltasi nella regione fra il Tanaro e la costa ligure occidentale, ha permesso la delimitazione di altri importanti carreggiamenti, fra cui uno analogo a questo della Val Maira, ma molto più esteso, nell'alta Valle del Tanaro, del quale spero poter fare una breve illustrazione in una prossima seduta.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sul problema delle funzioni primitive.* Nota di MARIO MANARINI, presentata dal Socio S. PINCHERLE [3].

Di questo ormai classico problema sono accennati i passi della risoluzione nella Nota del prof. L. Tonelli pubblicata in questi Rendiconti del 1920, 1° sem., pag. 44.

Sarà opportuno che il lettore tenga presente, oltre a quella nominata, anche le altre due Note dello stesso Autore, pubblicate negli stessi Rendiconti alle pagine 106 e 186.

Il Denjoy, nel suo *Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse*, apparso distribuito sul *Journal de mathématiques pures et appliquées* (1915),

[1] S. Franchi, *Notizie preliminari sulla geologia dell'Alta Valtellina* (Boll. Soc. Geol. It., vol. XXX, 1911).

[2] A. Spitz und G. Dyhrenfurth, *Monographie der Engadiner Dolomiten* (Beiträge zur Geol. Karte der Schweiz. Neue Folge, XLIV Lieferung.

[3] Presentata nella seduta del 2 novembre 1921.

sul *Bulletin de la Société mathématique de France* (1915), e sugli *Annales de l'École normale supérieure* (1916 e 1917), ottenne dagli sviluppi che ivi sono studiati, la completa risoluzione del citato problema per il caso del derivato $\varphi(x)$, *finito in ogni punto, potendo essere incognito ed indifferentemente variabile da punto a punto rispetto al lato ed al rango.* Il Tonelli, nelle Note sopra citate, risolve il problema delle funzioni primitive anche nel caso in cui il derivato $\varphi(x)$ *non sia finito in ogni punto*, ma con la condizione che sia di *lato e rango fissi.* Prescindendo da questa restrizione, il problema resta risolto completamente, poichè il Tonelli ne conclude la risoluzione in ogni caso in cui è determinato. Infatti è capitale la seguente proposizione, da lui dimostrata: « *condizione necessaria e sufficiente* « *affinchè una funzione* $f(x)$ *sia determinata a meno di una costante addi-* « *tiva da un suo numero derivato estremo* $\varphi(x)$ *è che*:

« 1°) *questo numero derivato* $\varphi(x)$ *sia conosciuto quasi dappertutto*;

« 2°) *nessuno dei due insiemi di punti in cui esso assume i valori* $+\infty$ *e* $-\infty$, *contenga un insieme perfetto* ».

Per risalire poi dalla $\varphi(x)$ alla $f(x)$, il Tonelli applica il *procedimento di totalizzazione del Denjoy* che chiama *procedimento d'integrazione alla Denjoy.*

Il Denjoy, per le applicazioni che aveva in vista, si fermò, trattando il problema delle funzioni primitive, al caso accennato del derivato finito in ogni punto, senz'altra restrizione. Dagli sviluppi studiati nella Memoria del Denjoy *è possibile* (come lo presagì il Tonelli) *dedurre la risoluzione completa del problema delle funzioni primitive per il numero derivato estremo*, ossia si può togliere anche la restrizione che il derivato sia di rango e lato fissi e conosciuti in ogni punto.

Di più è possibile studiare il problema della determinazione della primitiva indipendentemente dal procedimento di totalizzazione del Denjoy.

A questi due fatti mi rivolgo in questa Nota, ed avverto che farò uso della terminologia, molto utile, adoperata e proposta dal Denjoy nella Memoria ricordata.

§ 1. Anzitutto mi preoccupo di studiare la determinazione del problema delle funzioni primitive, ossia di stabilire *il caso più generale* in cui la funzione primitiva $f(x)$ è determinata dalla derivata o più generalmente dal numero derivato estremo $\varphi(x)$. È possibile di stabilire la seguente proposizione: « *condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione* $f(x)$ *sia* « *determinata in* (a, b) *dalla sua derivata* $\varphi(x)$, *uni- o bilaterale è che*:

« 1°) *la derivata* $\varphi(x)$ *sia conosciuta sopra uno spessore completo* (a, b);

« 2°) *l'aggregato, ove* $|\varphi(x)| = \infty$, *sia numerabile* ».

Infatti, se l'aggregato A, ove $\varphi(x)$ non è conosciuta, fosse *grosso* (di misura positiva), si potrebbe decomporre nella somma di infiniti aggregati P_i, distinti, ciascuno *grosso in sè* (di misura positiva in ogni punto) e d'un

aggregato *sottile* (di misura nulla). Se $m_i(x)$ è a funzione continua che definisce la misura di P_i fra a ed x $(a \leq x \leq b)$, allora le infinite funzioni $f(x)$, $f(x) + m_i(x) = \psi_i(x)$ $[i = 1, 2, \ldots \infty]$, ammetterebbero, in ogni punto del complementare A di A rispetto ad (a, b), la stessa derivata uni- o bilaterale $\varphi(x)$ senza differire per una costante. Se l'aggregato A è sottile, è necessario ancora che l'aggregato $|\varphi(x)| = \infty$ sia numerabile.

Se risultasse non numerabile, per esempio, l'aggregato $\varphi(x) = +\infty$, esso conterrebbe un aggregato perfetto P, e, se $t(x)$ è una funzione continua, costante sopra i contigui a P e crescente sopra P (funzione di cui si dimostra l'esistenza), le funzioni $f(x) + t(x)$ e $f(x)$ ammetterebbero la stessa derivata in ogni punto di (a, b), senza differire per una costante.

Supponendo soltanto di conoscere la $\varphi(x)$ almeno in uno spessore completo di (a, b), ciò non sarebbe sufficiente perchè risulti determinata la $f(x)$, chè verrebbe a possedere l'indeterminazione d'una funzione a numeri derivati finiti. Se invece a quell'ipotesi si aggiunga che sia numerabile l'aggregato $|\varphi(x)| = \infty$, si può dimostrare che la $f(x)$ risulterebbe completamente determinata. Così rimane stabilito il minimo delle condizioni che si debbono imporre alla derivata $\varphi(x)$ perchè determini la sua primitiva $f(x)$.

§. 2. Più in generale, trattando i derivati estremi, abbiamo la proposizione: « *condizione necessaria e sufficiente affinchè una funzione $f(x)$ sia* « *determinata da un suo derivato estremo $\varphi(x)$, di ordine e di lato in-* « *cogniti ed indifferentemente variabili da punto a punto in (a, b), è che:*

« 1°) *$\varphi(x)$ sia conosciuto sopra uno spessore completo di (a, b);*

« 2°) *l'aggregato, ove la funzione $f(x)$ ammette almeno un numero* « *derivato infinito, sia numerabile* ».

Se l'aggregato A dei punti di (a, b), ove $\varphi(x)$ non è conosciuto, fosse un aggregato grosso, avremmo che le infinite funzioni $f(x)$ e $\psi_i(x) = f(x) + m_i(x)$ $(i = 1, 2 \ldots \infty)$, costruite come nella dimostrazione precedente, ammetterebbero lo stesso numero derivato $\varphi(x)$ in ogni punto del complementare, A, di A rispetto ad (a, b), senza differire per una costante. La conoscenza di $\varphi(x)$ sopra un completo spessore di (a, b) sarebbe sufficiente a determinare $\varphi(x)$ nel caso che si sapesse *a priori* $f(x)$ risolubile, o, in particolare, se si sapesse nullo l'aggregato ove $f(x)$ ammette tutti e quattro i suoi numeri derivati estremi infiniti. Se queste ultime condizioni non sono verificate, in generale è necessario, perchè $f(x)$ risulti determinata, che sia *numerabile* l'aggregato E ove $f(x)$ ammette almeno un numero derivato estremo infinito, poichè l'ipotesi contraria implica l'esistenza di un aggregato perfetto P contenuto in E, ove $f(x)$ ammetterebbe un derivato estremo infinito di segno, rango e lato determinati e fissi. Se $t(x)$ è una funzione costante sui contigui a P e monotona sopra P (crescente o decrescente a seconda del segno + o — del numero derivato in P), la funzione $f(x) + t(x)$ ammetterebbe con la $f(x)$ gli stessi caratteri rispetto alla derivazione, senza

differire per una costante additiva. Invece la concomitanza delle due condizioni 1) e 2), enunciate nel teorema, è sufficiente per la determinazione della $f(x)$ mediante la $\varphi(x)$.

È evidente che, in relazione al teorema precedente, supponendo soltanto di conoscere $\varphi(x)$ sopra uno spessore completo di (a, b), si ha insufficienza per la determinazione della $f(x)$; ma, come abbiamo già affermato, se si aggiunge l'ipotesi 2) dell'enunciato, si ottiene la sufficienza.

§ 3. « *Una funzione $f(x)$ con derivata bilaterale $\varphi(x)$ finita in ogni* « *punto di (a, b), eccettuati al più i punti di un aggregato numerabile,* « *ove sia $|\varphi(x)| = \infty$, è una funzione risolubile* ».

Infatti si può affermare dapprima che $f(x)$ è a *variazione riducibile* sopra ogni aggregato perfetto sottile ω di (a, b).

Inoltre si perviene a concludere che sopra ogni aggregato perfetto sottile ω di (a, b) la variazione della $f(x)$ è *riducibile a zero*; condizione, questa, che definisce la risolubilità della $f(x)$.

Da questa proposizione e da quella al § 1 si deduce che, essendo la derivata bilaterale necessariamente *derivata approssimativa*, la coppia di funzioni $f(x)$ e $\varphi(x)$, dianzi considerata, ha i requisiti per essere chiamata coppia *totale indefinito*, *funzione totalizzabile*, ed è questa osservazione che *risolve completamente* il problema delle funzioni primitive nel caso della derivata.

Infatti, se $f(x)$ è incognita, con la derivata $\varphi(x)$ nota sopra uno spessore completo di (a, b), ed è inoltre $|\varphi(x)| = \infty$ numerabile, il procedimento di totalizzazione del Denjoy ci permette di risalire alla $f(x)$, a meno di una costante additiva, al termine d'una serie trasfinita numerabile di operazioni totalizzanti.

§ 4. Maggiore generalità si ha nella proposizione seguente: « *una fun-* « *zione $f(x)$, che ammette un derivato estremo $\varphi(x)$ di rango e lato inco-* « *gniti ed indifferentemente variabili da punto a punto, finito in ogni* « *punto, eccettuato al più in un punto aggregato numerabile, è una fun-* « *zione risolubile* ».

Anche qui prima si dimostra la *riducibilità* della funzione $f(x)$ sopra ogni aggregato perfetto sottile ω di (a, b) e poi non è difficile di far vedere che sopra ogni aggregato perfetto sottile la $f(x)$ è a variazione riducibile a zero e perciò è una funzione a *variazione risolubile*.

Il numero derivato $\varphi(x)$, testè considerato, essendo supposto finito sopra un completo spessore di (a, b), risulta essere la *derivata approssimativa* di $f(x)$ sopra uno spessore completo di (a, b), e per conseguenza $f(x)$ e $\varphi(x)$ hanno i caratteri per chiamarsi rispettivamente *totale indefinito* e *funzione totalizzabile*. Questo fatto ci fa concludere *in modo definitivo* rispetto al problema delle funzioni primitive riguardante i numeri derivati estremi. Infatti, se delle ora considerate funzioni, è $f(x)$ incognita e $\varphi(x)$ nota sopra

uno spessore completo di (a, b), ed inoltre si sappia *a priori* numerabile l'aggregato ove $f(x)$ ammette almeno uno degli estremi derivati infiniti, il procedimento di totalizzazione del Denjoy ci permette di ritrovare la $f(x)$ al termine d'una infinità numerabile d'operazioni totalizzanti.

Così *si può risalire alla primitiva* (a meno di una costante additiva) *di un numero derivato estremo* $\varphi(x)$, *infinito al più sopra uno spessore completo di* (a, b), *incognito rispetto al rango ed al lato, indifferentemente variabili da punto a punto.*

Unica restrizione necessaria è che la sua primitiva $f(x)$ si sappia, *a priori*, che non abbia derivati infiniti se non, al più, sopra un aggregato numerabile di punti (nel caso contrario il problema riuscirebbe indeterminato). Questo problema è il caso più generale che possa presentare, rispetto ai derivati estremi, il problema fondamentale del Calcolo allorchè esso è determinato, cioè nel caso in cui la primitiva resta determinata a meno di una costante additiva.

Si tratterebbe ora, nel caso della indeterminazione, di risalire per lo meno ad una delle funzioni primitive $f(x)$ che ammettono un certo derivato $\varphi(x)$ non soddisfacente alle condizioni impostegli sopra. In particolare si può studiare di determinare una delle primitive $f(x)$ del derivato $\varphi(x)$, conosciuto almeno in un completo spessore di (a, b), ma avente non numerabili i punti d'infinito; oppure si sappia che i punti, ove $f(x)$ ammette almeno un derivato infinito, costituiscono un aggregato non numerabile.

Relatività. — *Deduzione e interpretazione di qualche* ds^2 *einsteiniano simmetrico intorno ad un asse.* Nota di PAOLO STRANEO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

In questa Nota applico le conclusioni della precedente, dapprima alla deduzione di un ds^2 einsteiniano simmetrico intorno a un punto, ritrovando così la soluzione del problema di Schwarzschild, che, come è evidente, deve esser compresa, come caso particolarissimo, nella più ampia classe delle soluzioni simmetriche di Weyl. Faccio ciò perchè, malgrado che questo caso sia stato trattato dal Weyl stesso fin dai primordi della sua teoria, e che in seguito abbia costituito ripetutamente il punto di partenza di varie altre applicazioni, ci sarà nondimeno utile l'aver riveduta la stessa questione dal nuovo punto di vista.

Passo poscia alla deduzione di due altri ds^2 einsteiniani che, per la difficoltà di principio cui ho accennato al n. 2 della Nota precedente, hanno un valore prevalentemente formale, ma che conviene aver considerati per

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 ottobre 1924.