ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

uno spessore completo di $(a\,, b)$, ed inoltre si sappia *a priori* numerabile l'aggregato ove $f(x)$ ammette almeno uno degli estremi derivati infiniti, il procedimento di totalizzazione del Denjoy ci permette di ritrovare la $f(x)$ al termine d'una infinità numerabile d'operazioni totalizzanti.

Così *si può risalire alla primitiva* (a meno di una costante additiva) *di un numero derivato estremo* $\varphi(x)$, *infinito al più sopra uno spessore completo di* $(a\,, b)$, *incognito rispetto al rango ed al lato, indifferentemente variabili da punto a punto.*

Unica restrizione necessaria è che la sua primitiva $f(x)$ si sappia, *a priori*, che non abbia derivati infiniti se non, al più, sopra un aggregato numerabile di punti (nel caso contrario il problema riuscirebbe indeterminato). Questo problema è il caso più generale che possa presentare, rispetto ai derivati estremi, il problema fondamentale del Calcolo allorchè esso è determinato, cioè nel caso in cui la primitiva resta determinata a meno di una costante additiva.

Si tratterebbe ora, nel caso della indeterminazione, di risalire per lo meno ad una delle funzioni primitive $f(x)$ che ammettono un certo derivato $\varphi(x)$ non soddisfacente alle condizioni impostegli sopra. In particolare si può studiare di determinare una delle primitive $f(x)$ del derivato $\varphi(x)$, conosciuto almeno in un completo spessore di $(a\,, b)$, ma avente non numerabili i punti d'infinito; oppure si sappia che i punti, ove $f(x)$ ammette almeno un derivato infinito, costituiscono un aggregato non numerabile.

Relatività. — *Deduzione e interpretazione di qualche* ds^2 *einsteiniano simmetrico intorno ad un asse.* Nota di Paolo Straneo, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

In questa Nota applico le conclusioni della precedente, dapprima alla deduzione di un ds^2 einsteiniano simmetrico intorno a un punto, ritrovando così la soluzione del problema di Schwarzschild, che, come è evidente, deve esser compresa, come caso particolarissimo, nella più ampia classe delle soluzioni simmetriche di Weyl. Faccio ciò perchè, malgrado che questo caso sia stato trattato dal Weyl stesso fin dai primordi della sua teoria, e che in seguito abbia costituito ripetutamente il punto di partenza di varie altre applicazioni, ci sarà nondimeno utile l'aver riveduta la stessa questione dal nuovo punto di vista.

Passo poscia alla deduzione di due altri ds^2 einsteiniani che, per la difficoltà di principio cui ho accennato al n. 2 della Nota precedente, hanno un valore prevalentemente formale, ma che conviene aver considerati per

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 ottobre 1924.

poter chiarire qualche punto delicato in alcuni risultati pure essi solamente formali di altri autori.

Simmetria sferica. — **1.** Consideriamo una distribuzione di masse che nello spazio fisico ci appaia simmetrica attorno ad un centro, e supponiamo di condensarla, senza alterarne il campo esterno, su di una superficie sferica sempre più piccola. Noi sappiamo che — a differenza di quanto risulta nella teoria classica, ove non si verifica alcuna singolarità, atta a impedire il proseguimento di questa operazione teorica, fino a che la sfera non si sia ridotta ad un punto e la densità della massa sia quindi divenuta infinita — nella teoria einsteiniana tale concentrazione non può essere spinta oltre un certo limite (in ogni caso estremamente elevato), per cui si giunge sempre ad una sferetta di dimensioni finite. Ciò è notoriamente dovuto alla deformazione dello spazio che, nel senso radiale, si dilata infinitamente ove la concentrazione della massa supera un certo limite.

Consideriamo ora una superficie σ uscente da un asse qualsiasi della sfera e proponiamoci di determinare il ds^2 dello spazio-tempo. Dovremo cercare di sostituire ad essa un opportuno semipiano σ_0 e ricondurre così il ds^2 alle coordinate canoniche di Weyl come fu detto nella Nota precedente.

Per conoscere la distribuzione ausiliaria delle masse nello spazio euclideo, dalla quale si deve partire per calcolare il potenziale simmetrico ν e quindi la funzione λ e così esprimere il ds^2 secondo la forma

$$[1] \qquad ds^2 = V_0^2 e^{2\nu} dt^2 - e^{-2\nu} \{ e^{2\lambda} (dr^2 + dz^2) + r^2 d\varphi^2 \},$$

conviene osservare:

1°) che le linee $r = \text{cost.}$ sulla superficie σ potranno esser interpretate come le linee di un flusso scorrente da $+\infty$ a $-\infty$, che gira intorno all'ostacolo costituito dalla semicirconferenza appoggiata all'asse, mentre che le linee $z = \text{cost.}$, costituenti le loro traiettorie ortogonali, potranno essere interpretate come le corrispondenti linee di egual potenziale di velocità;

2°) che la superficie σ, allontanandosi dalla sfera, tenderà sempre più a identificarsi con un piano, col quale si confonderà effettivamente all'infinito, mentre che in vicinanza delle masse, la sua curvatura, esclusivamente provocata dalla massa stessa collocata al centro, dovrà essere essa pure simmetrica intorno al medesimo centro; che perciò la prima rappresentazione conforme della superficie σ sul semipiano σ_0 dovrà, oltre che soddisfare al noto comportamento all'infinito, trasformare le circonferenze concentriche sulla superficie σ, in circonferenze pure concentriche sul semipiano σ_0, lasciando così invariata di forma (non di dimensione), la distribuzione della massa, la quale risulterà così, anche su σ_0, disposta su di una semicirconferenza, di cui indicheremo con a il diametro;

3°) che l'ultima rappresentazione conforme del semipiano σ_0 su sè stesso sarà allora del tipo notissimo di quelle che trasformano il sistema ortogonale delle linee di flusso piano intorno ad un ostacolo circolare e delle relative linee equipotenziali, nel sistema delle coordinate cartesiane; rappresentazione che notoriamente dovremo poter rappresentare nella forma

$$r + iz - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{1}{r' + z'} = r + iz .$$

Da essa, risolta per rapporto alle due variabili r e z

$$r = r' - \left(\frac{a}{2}\right)\frac{z'}{r'^2 + z'^2}, \quad z = z' + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{z'}{r'^2 + z'^2},$$

si deduce senza difficoltà che, sul semipiano rappresentativo, la massa viene a trovarsi disposta uniformemente su di un segmento di lunghezza $2a$.

2. Stabilito così che la distribuzione corrispondente alla sfera dello spazio fisico è nello spazio ausiliario rappresentata da un segmento di densità uniforme, si possono determinare immediatamente il potenziale simmetrico ν e la funzione λ. Si avrà

$$\nu = \frac{1}{2} \log \frac{\frac{r_1 + r_2}{2} - a}{\frac{r_1 + r_2}{2} + a}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \log \frac{\left(\frac{r_1 + r_2}{2} - a\right)\left(\frac{r_1 + r_2}{2} + a\right)}{r_1 r_2}$$

ove con r_1 ed r_2 sono intese le distanze, sul piano σ_0, del punto generico di coordinate r, z dai due estremi del segmento $2a$.

Il ds^2 cercato è quindi, nelle coordinate canoniche di Weyl,

$$[2] \quad ds^2 = \mathrm{V}_0^2 \frac{\frac{r_1 + r_2}{2} - a}{\frac{r_1 + r_2}{2} + a} dt^2 - \frac{\frac{r_1 + r_2}{2} + a}{\frac{r_1 + r_2}{2} - a} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\left(\frac{r_1 + r_2}{2} - a\right)\left(\frac{r_1 + r_2}{2} + a\right)}{r_1 r_2} (dr^2 + dz^2) + r^2 d\varphi^2 \right\}$$

$$= \mathrm{V}_0^2 \frac{\frac{r_1 + r_2}{2} - a}{\frac{r_1 + r_2}{2} + a} dt^2 - \frac{\left(\frac{r_1 + r_2}{2} + a\right)^2}{r_1 r_2} (dr^2 + dz^2) - r^2 \frac{\frac{r_1 + r_2}{2} + a}{\frac{r_1 + r_2}{2} - a} d\varphi^2 .$$

Ponendo $\frac{r_1 + r_2}{2a} = e^x$ e conseguentemente $\nu = \log \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \log \operatorname{th} \frac{x}{2}$ e ancora $r + iz = \operatorname{sh}(x + iy)$, il ds^2 assumerà la forma

$$[3] \quad ds^2 = \mathrm{V}_0^2 \operatorname{th}^2 \frac{x}{2} dt^2 - 4a^2 \operatorname{ch}^4 \frac{x}{2} (dx^2 + dy^2) - 4a^2 \operatorname{ch}^4 \frac{x}{2} \cos^2 y \, d\varphi^2 .$$

Col cambiamento di variabile $\varrho = 2a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}$, si otterrà infine il ds^2 nella notissima forma di Schwarzschild.

Un'interessante degenerazione formale del ds^2 precedente — **3.** Se nel semipiano rappresentativo consideriamo un segmento su cui non sia distribuita la massa con densità unitaria come abbiamo supposto finora, ma con densità k, il potenziale ν assumerà il valore $\nu = \log \mathrm{th}^k \frac{x}{2}$ e, procedendo nel modo solito, potremo ottenere per il ds^2 l'espressione

$$[4] \quad ds^2 = V_0^2 \mathrm{th}^{2k} \frac{x}{2}\, dt^2 - a^2 \frac{\mathrm{sh}^2 x + \cos^2 y}{\mathrm{th}^{2k} \frac{x}{2}} \left(\frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x + \cos^2 y}\right)^{k^2} (dx^2 + dy^2)$$

$$- a^2 \frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{th}^{2k} \frac{x}{2}} \cos^2 y\, d\varphi^2 .$$

Si vede senza difficoltà che quest'equazione per $k = 1$ si riduce alla [3] e che per $k = 0$ diviene quella dello spazio-tempo della relatività ristretta; infatti si riduce a V_0^2 il coefficiente del dt^2 e all'elemento lineare dl_0^2 dello spazio euclideo in coordinate iperboliche x, y, φ il complesso dei termini spaziali, essendo appunto

$$dl_0^2 = a^2 (\mathrm{sh}^2 x + \cos^2 y)(dx^2 + dy^2) + a^2 \mathrm{sh}^2 x \cos^2 y\, d\varphi^2 .$$

Più interessante è discutere la forma delle superficie Σ nel dl^2 generale, sulle quali la variabile x conservi il valore costante x_1 e per cui quindi sia $dx = 0$.

L'elemento lineare di tali superficie sarà dato da

$$[5] \quad d\Sigma^2 = a^2 \frac{\mathrm{sh}^2 x_1}{\mathrm{th}^2 \frac{x_1}{2}} \left\{ \cos^2 y\, d\varphi^2 + \left(\frac{\mathrm{sh}^2 x_1 + \cos^2 y}{\mathrm{sh}^2 x_1}\right)\left(\frac{\mathrm{sh}^2 x_1}{\mathrm{sh}^2 x_1 + \cos^2 y}\right)^{k^2} dy^2 \right\}.$$

Si vede immediatamente che, ponendo per brevità $\mathrm{sh}^2 x_1 = c_1$, la [4] può scriversi

$$[5'] \qquad d\Sigma^2 = a^2 \frac{c_1^2}{\mathrm{th}^2 \frac{x_1}{2}} \left\{ \cos^2 y\, d\varphi^2 + \left(1 - \frac{\cos^2 y}{c_1^2}\right)^{1-k^2} dy^2 \right\},$$

la quale, per $k = 1$, rappresenta il quadrato dell'elemento lineare della superficie sferica di raggio $a \dfrac{\mathrm{sh}\, x_1}{\mathrm{th} \frac{x_1}{2}}$ e, per $k = 0$ quello di una superficie elissoidica rotonda allungata, come è facilissimo verificare.

Per ragioni fisiche (delle quali per brevità non ricordiamo se non la principale, che cioè per i valori di k, che possiamo raggiungere, k^2 è sempre trascurabile innanzi all'unità), la [4] può venire considerata come l'espressione formale estremamente approssimata del ds^2 corrispondente ad un *ellissoide di rivoluzione allungato di massa* $2ak$ e di distanza focale $2a$.

Altra applicazione formale. — **4.** Consideriamo ora sull'asse delle z, invece di uno solo, due segmenti, dei quali indicheremo successivamente con le cifre 1, 2, 3, 4 le estremità, con $2a_1$ e $2a_2$ le lunghezze e con d la distanza contata fra i punti 2 del primo e 3 del secondo, così che i due segmenti debbano venire a situarsi in seguito l'uno dell'altro quando si faccia $d = 0$.

Il potenziale totale ν, supposta la densità eguale ad uno, sarà la somma del potenziale dei due segmenti e quindi si avrà

$$[6] \qquad e^{2\nu} = \frac{\dfrac{r_1 + r_2}{2} - a_1}{\dfrac{r_1 + r_2}{2} + a_1} \cdot \frac{\dfrac{r_3 + r_4}{2} - a_2}{\dfrac{r_3 + r_4}{2} - a_2},$$

indicando, come al n. 2, con r_1 ed r_2 le distanze di un punto generico dagli estremi del primo segmento e corrispondentemente con r_3 e r_4 quelle dagli estremi del secondo.

Un calcolo laborioso, ma che non presenta difficoltà sostanziali, permette di determinare λ e quindi $e^{2\lambda}$. Si ottiene:

$$[7] \qquad e^{2\lambda} = \frac{\left(\dfrac{r_1 + r_2}{2}\right)^2 - a_1^2}{4 r_1 r_2} \cdot \frac{\left(\dfrac{r_3 + r_4}{2}\right)^2 - a_2^2}{4 r_3 r_4} \times$$
$$\times \left(\frac{d(a_2 + d)\, r_1 + (a_1 + d)(a_2 + d)\, r_2 - a_1 (a_2 + d)\, r_3}{d(a_2 + d)\, r_1 + d(a_1 + a_2 + d)\, r_2 - a_1 d r_4}\right)^2 .$$

Risulta quindi così determinato un ds^2 einsteiniano che potrebbe esser considerato corrispondere al campo di due punti materiali, se non esistesse la difficoltà di principio, varie volte ricordata, della non rigorosa legittimità dell'uso delle equazioni gravitazionali a tensore energetico nullo per risolvere un tale problema.

Quando il secondo dei segmenti si allontani indefinitamente, cioè quando si faccia $d = r_4 = r_3 = \infty$, si ritrova senza difficoltà l'elemento lineare [2] di un sol punto materiale di forma sferica e di raggio gravitazionale eguale ad $a_1/2$, e analogamente quando si faccia allontanare il primo segmento.

Quando invece si faccia $d = 0$, cioè ci si riduca ad aver nello spazio rappresentativo un solo segmento di lunghezza $2(a_1 + a_2)$, si ritrova lo spazio-tempo di un punto materiale di raggio gravitazionale $(a_1 + a_2)/2$. Per vederlo senza lunghi calcoli, conviene porre nelle formule generali [6] e [7] $r_2 = r_3 = \varrho$ e $d = 0$ e verificare che i valori di $e^{2\nu}$ e $e^{2\lambda}$ divengono allora identici ai coefficienti corrispondenti della [2] quando in essa si faccia

$a = a_1 + a_2$. In tale verifica convien fare ripetutamente uso della identità geometrica

$$a_2 r_1^2 + a_1 r_4^2 - (a_1 + a_2) \varrho^2 - 4 (a_1 + a_2) a_1 a_2 = 0 .$$

5. Il problema formale precedente è stato trattato indipendentemente e in forma differente dai sigg. Palatini [1] e Chazy [2]. Ma i loro risultati presentano una notevole divergenza che Chazy ha posta in evidenza, senza peraltro riuscire a darne la ragione fisica. Tale incertezza è dovuta al fatto che i sigg. Palatini e Chazy non considerano sufficientemente il comportamento delle masse fittizie nello spazio euclideo ausiliario.

Palatini impiega coordinate ellittiche generali, ciò che dà alle sue formule una maggior complicazione. Ma inoltre la sua soluzione, come ha rilevato, ma non spiegato Chazy, ha la proprietà che, ponendo in essa eguale a zero la grandezza che egli considera come distanza dei due punti, non si ritrova un ds^2 simmetrico intorno ad un punto.

Il criterio intuitivo che abbiamo seguìto ci permette di comprendere subito la ragione di questo comportamento. Ciò che Palatini impiega, invece del nostro d, è la distanza dei centri dei segmenti, o, meglio, degli ellissoidini che egli loro sostituisce; per cui, quando si fa quella distanza eguale a zero, si viene ad avere una sovrapposizione di segmenti, ossia un segmento di lunghezza eguale a quella del maggiore dei due precedenti, ma di densità in parte eguale ad 1, in parte eguale a 2. A tale segmento non può evidentemente, per quanto abbiamo veduto, corrispondere una sferetta dello spazio fisico.

Chazy invece elimina nella sua soluzione la difficoltà, coll'artificio di assumere di egual lunghezza $2a$ i due segmenti dello spazio rappresentativo da cui parte, supponendoli però di differenti densità k e k' e tali che, mentre ak e ak' sono proporzionali alle masse, sia pure $k + k' = 1$. La soluzione che in tale ipotesi egli elegantemente deduce impiegando funzioni iperboliche, analogamente a quanto abbiamo fatto per dedurre l'equazione [3] è la seguente:

$$ds^2 = \mathrm{th}^{2k} \frac{x}{2} \, \mathrm{th}^{2k'} \frac{x'}{2} \, dt^2 - a^2 \frac{\mathrm{sh}^2 x \cos^2 y}{\mathrm{th}^{2k} \frac{x}{2} \, \mathrm{th}^{2k'} \frac{x'}{2}} d\varphi^2$$
$$- a^2 (dx^2 + dy^2) \frac{\mathrm{sh}^2 x + \cos^2 y}{\mathrm{th}^{2k} \frac{x}{2} \mathrm{th}^{2k'} \frac{x}{2}} \left(\frac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x + \cos^2 y} \right)^{k^2} \left(\frac{\mathrm{sh}^2 x'}{\mathrm{sh}^2 x' + \cos^2 y'} \right)^{k'^2} \times$$
$$\times \left(1 + \frac{2}{c} \frac{\mathrm{sen}\, y - \mathrm{sen}\, y'}{\mathrm{ch}\, x + \mathrm{ch}\, x'} \right)^{2kk'}$$

con c distanza dei centri dei segmenti.

(1) Questi Rendiconti, 18 marzo 1923.
(2) C. R., 30 juillet et 12 novembre 1923.

Questa soluzione si riduce infatti precisamente all'eq. [3], cioè ad essere simmetrica intorno al centro, nel caso delle coincidenze dei due segmenti e quindi all'eguaglianza di x e x' e risp. di y e y', ma ne differisce però quando uno dei punti si allontani indefinitamente. In questo caso, diventando infinite le grandezze c e $\operatorname{sh} x'$ e uguale all'unità $\operatorname{th}\frac{x}{2}$, si ritrova invece la [4] che abbiamo veduto convenire, almeno con grande approssimazione, ad una massa distribuita su un'ellissoide rotondo allungato.

Il ragionamento che dovrebbe provare il contrario — che cioè, allontanandosi sufficientemente dal centro del primo segmento, il ds^2 tende alla simmetria sferica — non ha alcun valore dimostrativo e sarebbe a più forte ragione applicabile anche al ds^2 di Palatini quando i centri delle sue due masse sono venuti a coincidere, perchè tale proprietà hanno tutti i ds^2 einsteiniani, come pure i potenziali newtoniani della fisica classica corrispondenti a masse non illimitatamente distribuite.

Concludendo: alle condizioni poste da Chazy risponde senz'altro il ds^2 corrispondente alle formule [1], [6] e [7]; vi può pure corrispondere quello di Palatini, malgrado la sua forma complicata, purchè vi si interpreti opportunamente la costante in modo che essa debba assumere un valore eguale alla semisomma delle due distanze focali degli ellissoidini considerati, o, meglio, delle lunghezze dei segmenti ad essi equivalenti quando si voglia che i due punti materiali dello spazio fisico vengano a coincidere.

Meccanica. — *Sulla determinazione delle seiches forzate e delle seiches libere mediante una equazione integrale di Volterra di seconda specie.* Nota di L. MATTEUZZI, presentata dal Socio V. VOLTERRA (¹).

La determinazione delle seiches longitudinali libere nei laghi fu ricondotta dal prof. Chrystal (²) alla risoluzione di una equazione differenziale omogenea del secondo ordine con certe condizioni agli estremi. E nei casi in cui il bacino del lago non presenta brusche variazioni, si ottennero risultati soddisfacenti quando alla curva normale (³) fu possibile sostituire una curva analitica o tratti di curve analitiche raccordati.

Più recentemente il Proudman (⁴) risolse il problema in tutta la sua

(¹) Presentata nella seduta del 7 dicembre 1924.

(²) Chrystal, *On the hydrodynamical theory of seiches.* Trans. of the R. Soc. of Edinburgh, vol. XLI, Part. III (n. 25), 1905.

(³) È la curva che ha per ordinate i valori di $A(s)\cdot b(s)$ e per ascisse i valori di $\int b(s)\, ds$ (vedi notazioni nel seguito).

(⁴) Proudman, *Free and forced longitudinal tidal motion in a lake.* Proc. of the London Mathem. Soc., Series 2, vol. XIV, Part. 3 (1915).