ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Questa soluzione si riduce infatti precisamente all'eq. [3], cioè ad essere simmetrica intorno al centro, nel caso delle coincidenze dei due segmenti e quindi all'eguaglianza di x e x' e risp. di y e y', ma ne differisce però quando uno dei punti si allontani indefinitamente. In questo caso, diventando infinite le grandezze c e $\mathrm{sh}\, x'$ e uguale all'unità $\mathrm{th}\,\frac{x}{2}$, si ritrova invece la [4] che abbiamo veduto convenire, almeno con grande approssimazione, ad una massa distribuita su un'ellissoide rotondo allungato.

Il ragionamento che dovrebbe provare il contrario — che cioè, allontanandosi sufficientemente dal centro del primo segmento, il ds^2 tende alla simmetria sferica — non ha alcun valore dimostrativo e sarebbe a più forte ragione applicabile anche al ds^2 di Palatini quando i centri delle sue due masse sono venuti a coincidere, perchè tale proprietà hanno tutti i ds^2 einsteiniani, come pure i potenziali newtoniani della fisica classica corrispondenti a masse non illimitatamente distribuite.

Concludendo: alle condizioni poste da Chazy risponde senz'altro il ds^2 corrispondente alle formule [1], [6] e [7]; vi può pure corrispondere quello di Palatini, malgrado la sua forma complicata, purchè vi si interpreti opportunamente la costante in modo che essa debba assumere un valore eguale alla semisomma delle due distanze focali degli ellissoidini considerati, o, meglio, delle lunghezze dei segmenti ad essi equivalenti quando si voglia che i due punti materiali dello spazio fisico vengano a coincidere.

Meccanica. — *Sulla determinazione delle seiches forzate e delle seiches libere mediante una equazione integrale di Volterra di seconda specie.* Nota di L. Matteuzzi, presentata dal Socio V. Volterra (1).

La determinazione delle seiches longitudinali libere nei laghi fu ricondotta dal prof. Chrystal (2) alla risoluzione di una equazione differenziale omogenea del secondo ordine con certe condizioni agli estremi. E nei casi in cui il bacino del lago non presenta brusche variazioni, si ottennero risultati soddisfacenti quando alla curva normale (3) fu possibile sostituire una curva analitica o tratti di curve analitiche raccordati.

Più recentemente il Proudman (4) risolse il problema in tutta la sua

(1) Presentata nella seduta del 7 dicembre 1924.

(2) Chrystal, *On the hydrodynamical theory of seiches*. Trans. of the R. Soc. of Edinburgh, vol. XLI, Part. III (n. 25), 1905.

(3) È la curva che ha per ordinate i valori di $A(s)\cdot b(s)$ e per ascisse i valori di $\int b(s)\,ds$ (vedi notazioni nel seguito).

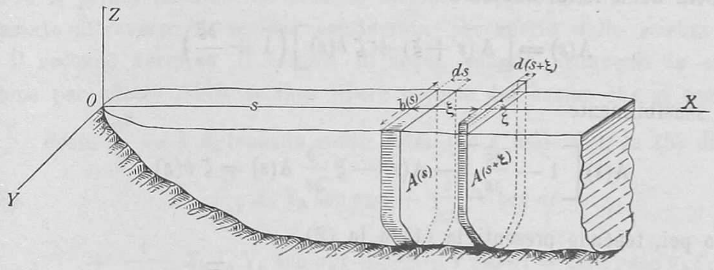
(4) Proudman, *Free and forced longitudinal tidal motion in a lake*. Proc. of the London Mathem. Soc., Series 2, vol. XIV, Part. 3 (1915).

generalità considerando seiches libere e seiches forzate in laghi di qualsiasi conformazione purchè, come frequentemente si verifica in natura, la forma e le dimensioni della sezione trasversale del lago variino lentamente.

Rilevata l'analogia esistente fra l'equazione differenziale delle corde vibranti e quella delle seiches, nonchè tra le condizioni agli estremi nei due problemi, il Proudman estese il noto metodo di Lagrange [1], delle corde vibranti, al caso in cui le masse concentrate nei punti di divisione non sono uguali. In tal modo e considerando l'equazione differenziale del problema come forma limite di una equazione alle differenze finite, trasse le soluzioni sia per le seiches libere che per le seiches forzate.

Nella presente Nota mi propongo di dimostrare come il problema possa essere risolto elegantemente e in modo più rapido, mediante una equazione integrale di Volterra.

Supposto il lago in quiete, si indichi con OX l'asse longitudinale della sua superficie libera, con OY l'asse orizzontale perpendicolare ad OX, con OZ l'asse verticale, e si consideri una qualunque sezione trasversale del lago perpendicolare all'asse OX, alla distanza s dall'origine.



Indichiamo con A(s) l'area di detta sezione, con $b(s)$ la sua larghezza alla superficie libera, con x l'area della superficie libera del lago compresa fra la predetta sezione e l'origine O, e con a l'area di tutta la superficie libera del lago. A(s) e $b(s)$ potranno essere indicati anche con A(x) e $b(x)$ rispettivamente.

Conduciamo una seconda sezione trasversale parallela ad A(s) alla distanza ds dalla prima. Il volume della fetta di lago compresa fra le dette due sezioni, il fondo e la superficie libera del lago in quiete, sarà A(s) ds.

Avremo intanto

$$\frac{dx}{ds} = b(x). \tag{1}$$

Essendo il moto che consideriamo analogo a quello delle cosidette « *onde di marea* » [2], potremo trascurare l'accelerazione verticale e rite-

[1] Lord Rayleigh, *The theory of sound*, vol. I, chap. VI, pag. 120, London, 1877.
[2] Lamb, *Hydrodynamics*, Chap. VIII, Cambridge, 1906.

nere, poichè l'accelerazione orizzontale risulta la stessa per tutte le particelle liquide giacenti in un piano perpendicolare all'asse del lago, che la velocità orizzontale u sia solo funzione di s e t.

Se indichiamo con $s + \xi$ la distanza, dopo il tempo t, della prima sezione della fetta di lago che consideriamo, dall'origine degli assi, lo spessore della fetta stessa nella sua nuova posizione sarà:

$$d(s + \xi) = \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial s}\right) ds .$$

Esprimendo con $\overline{V}$ il volume di acqua che dopo il tempo t è passato attraverso la sezione $A(x)$, avremo:

$$\xi = \frac{\overline{V}}{A(x)} . \tag{2}$$

La funzione $\overline{V}$ è tale che $\overline{V}(0) = \overline{V}(a) = 0$ perchè attraverso le sezioni estreme non avviene passaggio di acqua.

Dalla equazione di continuità, chiamando ζ il sollevamento della superficie libera della fetta, abbiamo

$$A(s) = \Big[A(s + \xi) + \zeta\, b(s) \Big] \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial s}\right)$$

ovvero, sensibilmente:

$$A(s)\left[1 - \frac{\partial \xi}{\partial s}\right] - A(s) - \xi \frac{\partial}{\partial s} A(s) = \zeta\, b(s) .$$

Avremo poi, tenendo presenti la (1) e la (2),

$$\zeta = -\frac{\partial}{\partial s}\Big[\xi\, A(s)\Big] \frac{1}{b(x)} = -\frac{\partial \overline{V}}{\partial x} \tag{3}$$

Ricerchiamo ora l'equazione del moto nel caso in cui la pressione esterna sia quella atmosferica, Π, funzione di s e t e la forza specifica di massa, Q, sia anch'essa funzione delle predette variabili.

Il sistema Euleriano si riduce pertanto alla equazione seguente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s} = -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial s} + Q ,$$

ove

$$u = \frac{d\xi}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{\partial p}{\partial s} = g\varrho \frac{\partial \zeta}{\partial s} + \frac{\partial \Pi}{\partial s} .$$

Infine per la lentezza del moto scriveremo:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial s} - \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \Pi}{\partial s} + Q . \tag{4}$$

Dalla (4), tenendo conto delle (1), (2) e (3), abbiamo

$$\frac{1}{g\,A(x)\,b(x)}\cdot\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x^2}=-\frac{1}{\varrho g}\cdot\frac{\partial \Pi}{\partial x}+\frac{1}{g\,b(x)}\,Q\,.$$

Ponendo

$$p(x)=A(x)\cdot b(x)\quad ;\quad -\frac{1}{\varrho g}\,\frac{\partial \Pi}{\partial x}+\frac{1}{g\,b(x)}\,Q=-\overline{F}\,,$$

l'equazione precedente diviene

$$\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial x^2}-\frac{1}{g\,p(x)}\cdot\frac{\partial^2 \overline{V}}{\partial t^2}=\overline{F}\,. \tag{5}$$

La funzione $p(x)$ non può divenire negativa, ma potrebbe annullarsi agli estremi per il verificarsi, o di $b(x)=0$, o di $A(x)=0$ oppure di $b(x)=A(x)=0$.

Supporremo la $\overline{F}$ funzione di x e funzione sinusoidale di t, della forma;

$$\overline{F}(x,t)=\Sigma_h\,F_h\,\mathrm{sen}\,\sigma_h t\,. \tag{6}$$

La funzione $\overline{V}$, in conseguenza, sarà espressa da

$$\overline{V}(x,t)=\Sigma_h\,V_h\,\mathrm{sen}\,\sigma_h t+V\,\mathrm{sen}\,\sigma t\,, \tag{7}$$

dove il primo termine del secondo membro rappresenta il volume di acqua passato attraverso la sezione considerata per effetto delle seiches forzate, e il secondo termine il volume di acqua passato attraverso la stessa sezione per effetto delle seiches libere proprie del bacino che si considera.

Posto $\frac{\sigma^2}{g}=\lambda$ e tenendo conto della (6) e della (7), la (5) diviene

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\Sigma_h\,V_h\,\mathrm{sen}\,\sigma_h t+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,V\,\mathrm{sen}\,\sigma t+ \tag{8}$$

$$+\frac{1}{p(x)}\,\Sigma_h\,\lambda_h\,V_h\,\mathrm{sen}\,\sigma_h t+\frac{\lambda}{p(x)}\,V\,\mathrm{sen}\,\sigma t=\Sigma_h\,F_h\,\mathrm{sen}\,\sigma_h t\,.$$

Dalla (8) deduciamo, per la determinazione delle seiches forzate, altrettante equazioni differenziali quante sono le forze esterne componenti, cioè

$$\frac{d^2 V_h}{dx^2}+\frac{\lambda_h}{p(x)}\,V_h=F_h\,; \tag{9}$$

mentre per la determinazione delle seiches libere avremo l'equazione differenziale

$$\frac{d^2 V}{dx^2}+\frac{\lambda}{p(x)}\,V=0 \tag{10}$$

la quale rappresenta il caso omogeneo della (9).

Prendendo in esame il caso generale e designando λ_h, V_h, F_h rispettivamente con λ, V, F, avremo

$$\frac{d^2 V}{dx^2}+\frac{\lambda}{p(x)}\,V=F\,. \tag{11}$$

La (11) può essere trasformata in una equazione integrale di Volterra di seconda specie.

Poniamo

$$-\frac{\lambda}{p(x)} = f(x) \quad \text{e} \quad \int_0^x \mathrm{F}(x)\,dx = \psi(x)$$

e integriamo la (11) fra 0 ed x; avremo

$$\frac{d\mathrm{V}}{dx} = \left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)_0 + \int_0^x f(y)\,\mathrm{V}(y)\,dy + \psi(x).$$

Chiamando C la costante $\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\right)_0$, ponendo $\int_0^x \psi(x)\,dx = \Phi(x)$, integrando fra 0 ed x e non omettendo di osservare che $\mathrm{V}(0) = 0$, otteniamo

$$\mathrm{V}(x) = \int_0^x dz \int_0^z f(y)\,\mathrm{V}(y)\,dy + \Phi(x) + \mathrm{C}x.$$

Invertendo le integrazioni con la nota formula di Dirichlet e ponendo $\Phi(x) + \mathrm{C}x = \varphi(x)$, avremo

$$\mathrm{V}(x) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{V}(y)\,dy \int_y^x dz + \varphi(x),$$

ossia

$$\mathrm{V}(x) = \int_0^x (x-y)\,f(y)\,\mathrm{V}(y)\,dy + \varphi(x);$$

onde sarà

(12) $$\varphi(x) = \mathrm{V}(x) + \int_0^x (y-x)\,f(y)\,\mathrm{V}(y)\,dy.$$

La (12), che è una equazione integrale di Volterra di seconda specie, il cui nucleo è

$$(y-x)\,f(y) = \frac{\lambda}{p(y)}(x-y),$$

ha per soluzione

(13) $$\mathrm{V}(x) = \varphi(x) + \int_0^x \mathrm{S}(x,y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Il nucleo risolvente $\mathrm{S}(x,y)$ ha la forma

(14) $$\mathrm{S}(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda(x-y)}{p(y)}\right]^{(i)}.$$

I termini della serie del secondo membro sono dati dalle seguenti espressioni (¹):

$$\left[\frac{\lambda(x-y)}{p(y)}\right]^{(1)} = -\frac{\lambda(x-y)}{p(y)}$$

$$\left[\frac{\lambda(x-y)}{p(y)}\right]^{(2)} = -\int_y^x \frac{\lambda(x-z_1)}{p(z_1)} \left[\frac{\lambda(z_1-y)}{p(y)}\right]^{(1)} dz_1$$

$$\left[\frac{\lambda(x-y)}{p(y)}\right]^{(3)} = -\int_y^x \frac{\lambda(x-z_1)}{p(z_1)} \left[\frac{\lambda(z_1-y)}{p(y)}\right]^{(2)} dz_1$$

. . . .

$$\left[\frac{\lambda(x-y)}{p(y)}\right]^{(i)} = -\int_y^x \frac{\lambda(x-z_1)}{p(z_1)} \left[\frac{\lambda(z_1-y)}{p(y)}\right]^{(i-1)} dz_1$$

. . . .

(¹) Volterra, *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, chap. II, 2°. Paris, 1913.

Cioè:

$$\left[\frac{\lambda(x-y)}{p(y)}\right]^{(1)} = \frac{(-\lambda)}{p(y)}(x-y) = \frac{(-\lambda)}{p(y)} I_0(y,x)$$

$$\left[\frac{\lambda(x-y)}{p(y)}\right]^{(2)} = \frac{(-\lambda)^2}{p(y)}\int_y^x \frac{(x-z_1)(z_1-y)}{p(z_1)}\,dz_1 = \frac{(-\lambda)^2}{p(y)} I_1(y,x)$$

$$\left[\frac{\lambda(x-y)}{p(y)}\right]^{(3)} = \frac{(-\lambda)^3}{p(y)}\int_y^x\int_y^{z_1} \frac{(x-z_1)(z_1-z_2)(z_2-y)}{p(z_1)\,p(z_2)}\,dz_1\,dz_2 = \frac{(-\lambda)^3}{p(y)} I_2(y,x)$$

. . . .

$$\left[\frac{\lambda(x-y)}{p(y)}\right]^{(i)} = \frac{(-\lambda)^i}{p(y)}\int_y^x\int_y^{z_1}\int_y^{z_2}\cdots\int_y^{z_{i-2}} \frac{(x-z_1)(z_1-z_2)\ldots(z_{i-2}-z_{i-1})(z_{i-1}-y)}{p(z_1)\,p(z_2)\ldots p(z_{i-2})\,p(z_{i-1})}\,dz_1\,dz_2\ldots dz_{i-1} =$$

$$= \frac{(-\lambda)^i}{p(y)} I_{i-1}(y,x)$$

. . . .

In generale si ha

(15) $$I_n(y,x) = \int_y^x\int_y^{z_1}\int_y^{z_2}\cdots\int_y^{z_{n-2}}\int_y^{z_{n-1}} \frac{(x-z_1)(z_1-z_2)\ldots(z_{n-1}-z_n)(z_n-y)}{p(z_1)\,p(z_2)\ldots p(z_{n-1})\,p(z_n)}\,dz_1\,dz_2\ldots dz_n$$

oppure

(16) $$I_n(y,x) = \int_y^x \frac{x-z}{p(z)} I_{n-1}(y,z)\,dz$$

con

(17) $$I_0(y,x) = x-y\,.$$

La (13) pertanto diviene

(18) $$V(x) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{\infty}(-\lambda)^i\int_0^x \frac{\varphi(y)}{p(y)} I_{i-1}(y,x)\,dy.$$

E, posto

(19) $$\Theta_i(0,x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{p(y)} I_{i-1}(y,x)\,dy\,,$$

sarà

(20) $$V(x) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{\infty}(-\lambda)^i\,\Theta_i(0,x)\,.$$

Ora, poichè dalla (19) e dalla (16) si ha

$$\Theta_i(0,x) = \int_0^x \frac{\varphi(y)}{p(y)}\,dy\int_y^x \frac{x-z}{p(z)} I_{i-2}(y,z)\,dz\,,$$

invertendo le integrazioni con la formola di Dirichlet otteniamo

$$\Theta_i(0,x) = \int_0^x \frac{x-z}{p(z)}\,dz\int_0^z \frac{\varphi(y)}{p(y)} I_{i-2}(y,z)\,dy\,,$$

cioè

(21) $$\Theta_i(0,x) = \int_0^x \frac{x-z}{p(z)}\,\Theta_{i-1}(0,z)\,dz\,.$$

Da questa espressione, tenendo conto della (19) e della (17), si desume facilmente che

(22) $$\Theta_0(0,x) = \varphi(x)\,.$$

Onde la (20) diviene

$$\mathrm{V}(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(-\lambda)^i\,\Theta_i(0,x)\,. \tag{23}$$

Se ora nella (23) poniamo $x=a$, ricordando che $\mathrm{V}(a)=0$, otteniamo:

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-\lambda)^i\,\Theta_i(0,a)=0\,, \tag{24}$$

che è l'*equazione dei periodi.*

Nel caso delle seiches libere, essendo $\mathrm{F}(x)=0$, sarà $\Phi(x)=0$ e quindi $\varphi(x)=\mathrm{C}x$. La (12) diviene allora

$$\mathrm{C}x=\mathrm{V}(x)+\int_0^x(y-x)\,f(y)\,\mathrm{V}(y)\,dy \tag{25}$$

od anche, ponendo $\mathrm{C}=1$ [1],

$$x=\mathrm{V}(x)+\int_0^x(y-x)\,f(y)\,\mathrm{V}(y)\,dy\,. \tag{26}$$

La soluzione di questa equazione, dedotta dalla (18), è

$$\mathrm{V}(x)=x+\sum_{i=1}^{\infty}(-\lambda)^i\int_0^x\frac{y}{p(y)}\,\mathrm{I}_{i-1}(y\,,x)\,dy\,. \tag{27}$$

Ad essa si può dare la forma (23), tenendo presente che le espressioni (19) e (22) divengono:

$$\Theta_i(0\,,x)=\int_0^x\frac{y}{p(y)}\,\mathrm{I}_{i-1}(y\,,x)\,dy \tag{28}$$

$$\Theta_0(0\,,x)=x\,. \tag{29}$$

Così pure nella equazione dei periodi (24) si dovrà porre

$$\Theta_i(0\,,a)=\int_0^a\frac{y}{p(y)}\,\mathrm{I}_{i-1}(y\,,a)\,dy$$

$$\Theta_0(0\,,a)=a\,.$$

[1] In ogni singola applicazione sarà possibile, mediante opportuna scelta dell'unità di misura, riportare nella (25) la costante al valore unitario.