# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXXIII.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

**Idromeccanica.** — *Un nuovo paradosso idrodinamico.* Nota di BRUNO FINZI, presentata dal Corrispondente U. CISOTTI [1].

Considero il moto indotto in una massa fluida viscosa, indefinitamente estesa in ogni senso, da un solido in essa immerso, e dotato di traslazione uniforme con velocità $\mathbf{c}$.

Nella ipotesi che sia ovunque

$$(1)\quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\,, \qquad (2)\quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0\,,$$

caratterizzo il sistema di forze, che, applicate al corpo, sono atte ad equilibrare il sistema di sforzi indotti dal fluido sul corpo in esso immerso. Tale sistema di forze equivale a quello che si eserciterebbe nella ipotesi di fluido perfetto [2]. Il lavoro da esso compiuto nell'unità di tempo è nullo. D'altra parte, l'energia che si dissipa nell'unità di tempo in seno al fluido, espressa dalla funzione di Lord Rayleigh, risulta diversa da zero, mentre si mantiene costante l'energia della massa fiuida. Mi limito, per ora, a constatare il risultato paradossale, riserbandomi in una prossima comunicazione di fissare nuovi criterî per il calcolo della funzione dissipazione. In particolare, la nuova funzione risulterà nulla nel caso in esame.

1. Sia $\sigma$ la superficie chiusa limitante il corpo. Sia $\mathbf{n}$ un vettore unitario normale a $\sigma$, e diretto verso il fluido. Gli sforzi che si eserciteranno in superficie saranno definiti da $\Phi_n = \beta\mathbf{n}$; e, nelle ipotesi (1), (2), l'omografia $\beta$ sarà espressa dalla

$$(3)\qquad \beta = p - 2\nu\,\frac{d\mathbf{v}}{d\mathrm{P}}\ \text{[3]}.$$

Nella (3) $p$ è la pressione, $\nu$ il coefficiente di viscosità.

Valutiamo la risultante delle forze agenti in superficie. Ricordando

[1] Presentata nella seduta del 2 novembre 1924.

[2] La identità, nelle ipotesi (1) e (2), delle equazioni indefinite, nel caso di moto di fluido viscoso, e in quello di fluido perfetto, non giustifica, *a priori*, l'asserto: così mostrò U. Cisotti. *Sull'influenza della viscosità nei moti piani irrotazionali di liquidi naturali.* Rend. Acc. dei Lincei, vol. XXXII, 1923.

[3] Cfr. C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Analyse vectorielle générale*, II, Pavia. 1913, pag. 29.

la (3), la (1) e la (2), avremo:

$$(4)\quad \int_\sigma \Phi_n\, d\sigma = \int_\sigma p\mathbf{n}\, d\sigma - 2\nu \int_\sigma \Big[ (\mathrm{div}\,\mathbf{v})\, \mathbf{n} + (\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) \wedge \mathbf{n} \Big] d\sigma = \int_\sigma p\mathbf{n}\, d\sigma \text{ (1)}.$$

La (4) sussiste nella ipotesi che $\mathbf{v}$ e $\dfrac{d\mathbf{v}}{dP}$ siano funzioni regolari in tutto lo spazio esterno a $\sigma$, tali cioè da annullarsi di ordine conveniente all' infinito (2), dove, in assenza di forze di massa, risulta $\beta = p = p_0 =$ cost. Poichè $p$ ha lo stesso valore che gli competerebbe nella ipotesi di fluido perfetto [si ricordi che le equazioni indefinite dell' idrodinamica, nelle ipotesi (1), (2), sono le stesse per fluidi perfetti e per fluidi viscosi], il paradosso di d'Alembert ci assicura che la risultante degli sforzi ammette componente secondo $\mathbf{c}$ (resistenza diretta) identicamente nulla, così che

$$(5)\qquad \mathbf{c} \times \int_\sigma \Phi_n\, d\sigma = 0\,.$$

Il momento degli sforzi sarà definito da

$$\mathbf{M} = \int_\sigma (P - O) \wedge \Phi_n\, d\sigma\,,$$

dove O è un punto fisso generico. Ricordando la (3), avremo:

$$(6)\qquad \mathbf{M} = \int_\sigma (P - O) \wedge p\mathbf{n}\, d\sigma - 2\nu \int_\sigma (P - O) \wedge \frac{d\mathbf{v}}{dP}\, \mathbf{n}\, d\sigma\,.$$

La (6) ci assicura come $\mathbf{M}$ risulti somma di due parti: una identica al momento degli sforzi esercitantisi su di un corpo immerso, nelle condizioni del problema, in un liquido perfetto; l'altra, annullantesi per $\nu = 0$, dovuta esclusivamente alla viscosità del liquido. Valutiamo quest'ultima. Ricordando le condizioni all' infinito, scriveremo:

$$-2\nu \int_\sigma (P - O) \wedge \frac{d\mathbf{v}}{dP}\, \mathbf{n}\, d\sigma = 2\nu \int_\sigma \mathbf{v} \wedge \mathbf{n}\, d\sigma \text{ (3)}.$$

In virtù della (2), $\mathbf{v}$ è gradiente di uno scalare, così che $\displaystyle\int_\sigma \mathbf{v} \wedge \mathbf{n}\, d\sigma = 0$. Nelle condizioni del problema, dunque, il momento degli sforzi, così come la loro risultante [si ricordi la (4)], non dipende dalla viscosità del liquido (4).

(1) C. Burali-Forti e R. Marcolongo, loc. cit., I, pag. 114. Alla stessa conclusione si giunge se si ricorda che $\displaystyle\int_\tau \Delta' \mathbf{v} = - \int_\sigma \frac{d\mathbf{v}}{dP}\, d\sigma$ (C. Burali-Forti e R. Marcolongo, loc. cit., I, pag. 108). Nella precedente, $\tau$ è il volume limitato da $\sigma$, e, per la (1) e la (2), $\Delta' \mathbf{v} = 0$.

(2) Le condizioni all' infinito sono quelle stesse che hanno permesso di dedurre il classico paradosso di d'Alembert (cfr. U. Cisotti, *Sulle azioni dinamiche di masse fluide continue*. Rend. Ist. lombardo, vol. L, fasc. 12-13, § 9).

(3) Si ricordi che $\Delta' \mathbf{v} = \Delta'(P - O) = 0$, e si applichi il lemma di Green (cfr. ad es. C. Burali-Forti e R. Marcolongo, loc. cit., I, pag. 114).

(4) Allo stesso risultato, con altri procedimenti, nel caso stazionario, in condizioni più generali, giunge U. Cisotti (loco ultimo citato).

**2.** Il lavoro compiuto dalle forze esterne, atte ad equilibrare il sistema di sforzi $\Phi_n$, è nullo. Infatti: il sistema, per le considerazioni poc'anzi svolte, è identico a quello proprio ad un corpo immerso in un fluido perfetto. D'altra parte il moto del liquido è identico a quello che si verificherebbe qualora, *caeteris paribus*, il liquido fosse perfetto [si ricordi ancora una volta la identità delle equazioni idrodinamiche, nelle ipotesi (1), (2), nel caso perfetto e viscoso]. Il lavoro compiuto dalle forze esterne sarà dunque nel caso in esame, come nel caso di fluido perfetto, identicamente nullo.

La funzione dissipazione di Lord Rayleigh (¹), nelle ipotesi (1), (2), è definita da

$$2\Psi = -\nu \int_\sigma \operatorname{grad} v^2 \times \mathbf{n}\, d\sigma = -\nu \int_\sigma \frac{dv^2}{dn}\, d\sigma .$$

$2\Psi$ è generalmente diversa da zero. Si pensi, ad esempio, al caso particolare in cui una sfera si muova, nelle condizioni del problema, in seno ad un fluido. Per essa, notoriamente, il quadrato della velocità di una particella fluida, relativamente alla sfera stessa, è definito da

$$(7) \qquad (\mathbf{v}-\mathbf{c})^2 = \frac{c^2 R^3}{r^3} \left\{ 3 \left[ \frac{R^3}{4r^3} - 1 \right] \cos^2\varphi + \frac{R^3}{4r^3} + \frac{r^3}{R^3} + 1 \right\},$$

dove R è il raggio della sfera, $r$, $\varphi$ le coordinate geografiche raggio vettore e zenit di un punto rispetto all'asse polare diretto come $\mathbf{c}$. Ma

$$\int_\sigma \frac{dv^2}{dn}\, d\sigma = \int_\sigma \frac{d(\mathbf{v}-\mathbf{c})^2}{dn}\, d\sigma + 2\mathbf{c} \times \int_\sigma \frac{d\mathbf{v}}{dP}\, \mathbf{n}\, d\sigma ,$$

e il secondo addendo, per la (5), è nullo. Poi che $\mathbf{n} = \operatorname{vers}(P-O)$, e $|P-O| = r$, deriveremo la (7) rispetto ad $r$, ed integreremo lungo la superficie sferica. Otterremo così, facilmente, $2\Psi = 12\,\nu\pi c^2 R$.

L'energia cinetica del sistema è costante. Infatti: in assenza di forze di massa, l'equazione vettoriale indefinita, nelle ipotesi (1), (2), è la seguente:

$$\varrho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p ,$$

nella quale $\varrho$ rappresenta la densità. Moltiplichiamola scalarmente per $\mathbf{v}$; poniamo $2T = \int_\sigma \varrho\, v^2\, d\tau$, ed integriamo nello spazio $\tau$ occupato dal liquido. Avremo, ricordando la (1), per formule note,

$$\frac{dT}{dt} = \int_\tau (p \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{div} p\mathbf{v})\, d\tau = \int_\sigma (\mathbf{v}-\mathbf{c}) \times p\mathbf{n}\, d\sigma + \mathbf{c} \times \int_\sigma p\mathbf{n}\, d\sigma .$$

(¹) Cfr. C. Burali-Forti e R. Marcolongo, loc. cit., II, pag. 65. Cfr. Lord Rayleigh, *Some general theoremes relating to vibrations*. Proc. Lond. Math. Soc. (1873), pag. 357 (Papers t. d., p. 170): *Theory of Sound*, Art. 81. Cfr. Lamb, *Hydrodynamics*, pp. 521, 540, 541.

Ricordiamo la (4) e la (5); teniamo presente come, essendo $\sigma$ superficie di flusso, sia $(\mathbf{v}-\mathbf{c})\times\mathbf{n}=0$ [1]; otterremo

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt}=0 \quad , \quad \mathrm{T}=\mathrm{cost.}$$

Riepilogando: 1°) Non compiremo lavoro facendo avanzare un corpo in seno al fluido. 2°) Neppure varierà l'energia cinetica del sistema. 3°) Ciò non ostante, durante il moto si dissiperà nell'unità di tempo una porzione d'energia $2\Psi$. Se l'ultima conclusione risponde all'intuizione fisica del fenomeno, la prima, costituente una estensione del classico paradosso di d'Alembert, è però rigorosa conseguenza delle premesse e delle equazioni idrodinamiche; premesse ed equazioni che soltanto hanno permesso di giungere alla terza conclusione. Quest'ultima, ferma la seconda, è in manifesta contraddizione con la prima, e rappresenta un paradosso del paradosso di d'Alembert. Ben naturale è il dubbio che, nel caso in istudio, la funzione $2\Psi$ di Lord Rayleigh rappresenti effettivamente l'energia che si dissipa durante il moto.

In una prossima Nota preciserò le condizioni per le quali effettivamente l'energia dissipata è espressa dalla $2\Psi$, e, in particolare, mostrerò come tali condizioni non sussistano nel caso in esame. Introdurrò una nuova funzione $2\Gamma$ più generale della $2\Psi$, definente la dissipazione d'energia. In particolare, nel nostro caso, si otterrà identicamente $2\Gamma=0$, così come vuole la concordanza dei risultati.

**Astronomia. —** *Sulla possibilità di un assetto rigorosamente razionale dei fondamenti dell'astronomia stellare di posizione.* Nota di VITTORIO NOBILE, presentata dal Socio V. CERULLI.

Il problema di esplorare la configurazione dell'universo siderale e di investigare i movimenti relativi delle diverse parti di esso è stato, come era naturale, considerato dagli astronomi, in una prima epoca, esclusivamente dal punto di vista geometrico-dinamico: i dati delle osservazioni sono stati pertanto desunti da sole misure di posizioni e velocità, e solo in epoca recentissima una larga messe di fatti fisici è stata messa a contribuzione per una indagine più profonda e più vasta.

È da qualche anno che, avendo preso in esame i termini del problema nella sua essenza matematica ed esaminato il valore e il significato da at-

[1] A. Guglielmi, *Sul moto vorticoso dei fluidi*. Atti Ist. veneto, tomo LXXX, 2°, pag. 389.