ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Ricordiamo la (4) e la (5); teniamo presente come, essendo σ superficie di flusso, sia $(\mathbf{v}-\mathbf{c})\times\mathbf{n}=0$ [1]; otterremo

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt}=0\ ,\quad \mathrm{T}=\mathrm{cost.}$$

Riepilogando: 1°) Non compiremo lavoro facendo avanzare un corpo in seno al fluido. 2°) Neppure varierà l'energia cinetica del sistema. 3°) Ciò non ostante, durante il moto si dissiperà nell'unità di tempo una porzione d'energia 2Ψ. Se l'ultima conclusione risponde all'intuizione fisica del fenomeno, la prima, costituente una estensione del classico paradosso di d'Alembert, è però rigorosa conseguenza delle premesse e delle equazioni idrodinamiche; premesse ed equazioni che soltanto hanno permesso di giungere alla terza conclusione. Quest'ultima, ferma la seconda, è in manifesta contraddizione con la prima, e rappresenta un paradosso del paradosso di d'Alembert. Ben naturale è il dubbio che, nel caso in istudio, la funzione 2Ψ di Lord Rayleigh rappresenti effettivamente l'energia che si dissipa durante il moto.

In una prossima Nota preciserò le condizioni per le quali effettivamente l'energia dissipata è espressa dalla 2Ψ, e, in particolare, mostrerò come tali condizioni non sussistano nel caso in esame. Introdurrò una nuova funzione 2Γ più generale della 2Ψ, definente la dissipazione d'energia. In particolare, nel nostro caso, si otterrà identicamente $2\Gamma=0$, così come vuole la concordanza dei risultati.

Astronomia. — *Sulla possibilità di un assetto rigorosamente razionale dei fondamenti dell'astronomia stellare di posizione.* Nota di VITTORIO NOBILE, presentata dal Socio V. CERULLI.

Il problema di esplorare la configurazione dell'universo siderale e di investigare i movimenti relativi delle diverse parti di esso è stato, come era naturale, considerato dagli astronomi, in una prima epoca, esclusivamente dal punto di vista geometrico-dinamico: i dati delle osservazioni sono stati pertanto desunti da sole misure di posizioni e velocità, e solo in epoca recentissima una larga messe di fatti fisici è stata messa a contribuzione per una indagine più profonda e più vasta.

È da qualche anno che, avendo preso in esame i termini del problema nella sua essenza matematica ed esaminato il valore e il significato da at-

[1] A. Guglielmi, *Sul moto vorticoso dei fluidi*. Atti Ist. veneto, tomo LXXX, 2°, pag. 389.

tribuirsi agli elementi forniti dalle osservazioni così come sono ora presentati (coordinate sferiche, parallassi, moti proprî), è sorta in me la persuasione che, per la sostanziale indeterminatezza del problema stesso dei movimenti stellari così come è adesso posto nell'astronomia tradizionale e per la conseguente larga introduzione di concezioni e procedimenti empirici sussidiarî, si sia determinato uno stato di cose per cui la validità delle deduzioni, che si è creduto di poter trarre in materia di misura e coordinamento di moti proprî, risulti gravemente infirmata.

Si è imposto così alla mia mente il problema di ricercare se quegli elementi empirici potessero esser sostituiti da altri razionali da assumersi come dati o postulati. Credo che la soluzione di tale problema possa considerarsi sostanzialmente raggiunta e brevemente qui dimostrerò come, coi procedimenti che passo a proporre, si renda possibile una concezione pienamente organica ed unitaria del problema geometrico e cinematico della deformazione intrinseca dell'aggruppamento di stelle considerato e come, in particolare, il problema importantissimo della determinazione delle distanze stellari venga *del tutto sottratto alle pratiche empiriche.*

Mi riserbo di esporre in un'ampia relazione ulteriore alcune considerazioni critiche sui procedimenti usuali, fatte dal nostro punto di vista. Penso di procedere pure, in quella occasione, ad una breve discussione sui metodi essenzialmente fisici ai quali ho fatto cenno in principio, per giustificare la separazione dei due indirizzi, che mi sembra doversi, nella fase attuale delle ricerche, ancora mantenere. Ed infine accennerò allora ad altre considerazioni, apparentemente accessorie ma in realtà coessenziali al presente problema, sul fenomeno dell'aberrazione inteso in tutta la dovuta ampiezza, considerazioni per le quali sono già preparati gli elementi in altra Nota pubblicata in questi Rendiconti [1]. Giudico però ora opportuno, data la fondamentale importanza dell'argomento, non differire più oltre la pubblicazione di risultati che mi sembrano conclusivi.

Detti $\boldsymbol{v}_o$ e $\boldsymbol{v}_i$ i vettori rappresentanti rispettivamente le velocità rispetto ad una qualsiasi terna inerziale del centro di massa O del sistema solare (praticamente identificabile col centro del Sole) e di una stella S_i, e $\boldsymbol{\Omega}$ il vettore rotazione assoluta di un triedro T colla origine in O, al quale sia possibile riferire direttamente con osservazioni le posizioni stellari (triedro intermediario), sussiste la relazion vettoriale

$$\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_o = S'_{ri} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (S_i - O),$$

essendo S'_{ri} la velocità relativa di S_i rispetto a T. Questa relazione si tra-

[1] *Sopra una notevole espressione assoluta del fenomeno della aberrazione totale* (vol. XXXI, 2° sem., pag. 543; vol. XXXII, 1° sem., pag. 14).

duce in coordinate cartesiane nelle tre

$$(1)\quad \begin{cases} v_{ix} - v_{ox} = \dfrac{dx_i}{dt} + qz_i - ry_i \\ v_{iy} - v_{oy} = \dfrac{dy_i}{dt} + rx_i - pz_i \\ v_{iz} - v_{oz} = \dfrac{dz_i}{dt} + py_i - qx_i \, , \end{cases}$$

in numero di $3n$ se le stelle considerate sono n. Il problema cinematico di individuare la deformazione intrinseca dell'aggruppamento considerato, ossia quello di determinare le componenti $v_{ix} - v_{ox}$, $v_{iy} - v_{oy}$, $v_{iz} - v_{oz}$ dei vettori $\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_o$, si presenta dunque indissolubilmente collegato con quello di determinare la rotazione Ω del triedro intermediario T. Se l'astronomo, dedotte dalle sue osservazioni le x'_i, y'_i, z'_i (spostamenti relativi a T) e le posizioni x_i, y_i, z_i (a parte la difficoltà per le distanze), vuol determinare i valori numerici *attuali* delle componenti di Ω e dei vettori $\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_o$, si trova dunque di fronte ad un sistema di $3n$ equazioni con $3n + 3$ incognite. Se suppone invece, coi procedimenti usuali dove il triedro intermediario è collegato coi piani definiti dai movimenti della Terra, risoluto il problema analitico di integrare le equazioni della rotazione di T nel moto perturbato ed espresse le componenti p, q, r in funzione del tempo e delle costanti, il problema è egualmente indeterminato, perchè trattasi allora di calcolare i valori delle componenti $v_{ix} - v_{ox}$, etc. e delle costanti di integrazione.

Gli astronomi pensano tuttavia di aver superato le difficoltà colla introduzione di alcune ipotesi che esamineremo altrove. Mi limito per ora a rilevare che tali ipotesi equivalgono a stabilire la condizione che le costanti di integrazione debbono presentare la proprietà di minimizzare la funzione

$$(2)\qquad \sum_i [\Omega \wedge (\mathrm{S}_i - \mathrm{O})]^2 + 2\sum_i [\Omega \wedge (\mathrm{S}_i - \mathrm{O})] \times (\tau + \mathrm{S}'_{ri})$$

dove τ è il vettore che definirebbe la traslazione del sistema solare, secondo una concezione soggetta, come abbiamo altrove mostrato [1], a gravi obbiezioni. La prima sommatoria, quando si introduca la omografia vettoriale

$$\sigma = -\sum_i (\mathrm{S}_i - \mathrm{O}) \wedge [(\mathrm{S}_i - \mathrm{O}) \wedge] \, ,$$

analoga alla omografia d'inerzia, e si chiami ω il modulo di Ω, può scriversi

$$\omega^2 (\boldsymbol{u} \times \sigma \boldsymbol{u}) :$$

il gruppo di termini in questione è analiticamente analogo alla energia cinetica del sistema discontinuo costituito dall'intero gruppo di stelle nel moto di tra-

[1] *La nozione di moto proprio solare e il suo valore come elemento per lo studio della evoluzione dell'ammasso galattico* (Memorie della Soc. astronomica italiana, vol. II, n. 1).

scinamento corrispondente alla rotazione di T. Della seconda sommatoria la parte non trascurata rappresenta la somma dei momenti, rispetto all'asse di rotazione di T, delle velocità relative delle stelle. Ricorrendo poi ad altre ipotesi, tutte non meno arrischiate ed arbitrarie di quelle sulle quali si fonda l'equazione di minimo, da questa si deducono tre equazioni le quali completerebbero il sistema (1).

Persuaso della insufficienza di tali basi ad affrontare lo studio, di necessità sempre più profondo, della evoluzione del sistema stellare, ho riconosciuto, dopo un attento esame del problema, che la complicazione e la indeterminatezza che lo caratterizzano derivano, principalmente, da tre cause:

1°) Inopportuna scelta del triedro intermediario T (collegato coi piani definiti dai movimenti della Terra);

2°) Impossibilità della misura diretta delle distanze stellari: quindi inevitabile connessione del problema geometrico con quello del movimento;

3°) Mancata inclusione nel calcolo di un dato essenziale: quello dell'annullarsi, almeno in prima approssimazione, delle accelerazioni assolute.

Senza addentrarmi in considerazioni critiche, riassumo qui schematicamente i risultati, pei quali vien subordinata la trattazione rigorosa del problema dell'astronomia stellare al solo *postulato* dinamico, innanzi accennato, sulle accelerazioni assolute delle stelle.

Dette S''_{ai} e O''_a le accelerazioni assolute della stella S_i e del centro di massa O del sistema solare si ha, per le nostre ipotesi, $S''_{ai} = O''_a = 0$. Un triedro assoluto T_o può pertanto aver la origine in O: detta allora S''_{ri} l'accelerazione *relativa* di S_i rispetto ad un qualsiasi triedro intermediario T colla origine in O, S''_{ti} l'accelerazione di trascinamento di S_i dovuta alla rotazione di T, ed S''_{ic} l'accelerazione centrifuga composta si ha, posto $S_i - O = \varrho_i \boldsymbol{s}$ (ϱ_i modulo del vettore $S_i - O$ e $\boldsymbol{s}$ vettore unitario),

$$S'_{ri} = \varrho'_i \boldsymbol{s} + \varrho_i \boldsymbol{s}' \ , \ S''_{ri} = \varrho'' \boldsymbol{s} + 2\varrho' \boldsymbol{s}' + \varrho \boldsymbol{s}''$$

dove le derivate rispetto al tempo si intendono corrispondere a spostamenti *relativi al triedro* T. In quanto alle S''_{ti}, se si introduce la omografia vettoriale β definita da

$$\beta = \mathrm{H}(\Omega, \Omega) - \Omega^2 + \Omega' \wedge ,$$

con

$$\mathrm{H}(\Omega, \Omega)\, \mathbf{x} = \Omega \times \mathbf{x} \cdot \Omega ,$$

si ha, poichè $O''_t = 0$,

$$S''_{ti} = \varrho \beta \boldsymbol{s} ,$$

trascurando gli indici i nel secondo membro. Poi

$$S''_{ic} = 2\Omega \wedge S'_{ri} = 2\Omega \wedge (\varrho' \boldsymbol{s} + \varrho \boldsymbol{s}') .$$

Si ha allora, pel teorema di Coriolis, per ogni stella considerata, l'equazione

$$\varrho \{ \boldsymbol{s}'' + \beta \boldsymbol{s} + 2\Omega \wedge \boldsymbol{s}' \} + 2\varrho' \{ \boldsymbol{s}' + \Omega \wedge \boldsymbol{s} \} + \varrho'' \boldsymbol{s} = 0 \tag{3}$$

che fornisce tre equazioni cartesiane omogenee fra ϱ, ϱ' e ϱ''. Non potendo tali equazioni ammettere la sola soluzione $\varrho = \varrho' = \varrho'' = 0$, occorre che si annulli il determinante D del sistema fornito dalla (3): condizione che in forma assoluta si esprime

$$(4) \qquad (\boldsymbol{s}'' + \beta \boldsymbol{s} + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{s}') \wedge (\boldsymbol{s}' + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{s}) \times \boldsymbol{s} = 0 .$$

Questa equazione fa dipendere il problema della determinazione di $\boldsymbol{\Omega}$ e $\boldsymbol{\Omega}'$ da misure fatte *sulle sole distanze angolari mutue delle stelle e relative variazioni prime e seconde.*

Con opportune e naturali ipotesi sull'ordine di grandezza di *mod* $\boldsymbol{\Omega}$ e *mod* $\boldsymbol{\Omega}'$ si ha, se il triedro T è opportunamente collegato a stelle, per la (4) la forma semplificata

$$(5) \qquad (3\boldsymbol{s}'^2 \boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}'') \times \boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{\Omega}' + \boldsymbol{s}'' \wedge \boldsymbol{s}' \times \boldsymbol{s} = 0 .$$

In coordinate cartesiane, dette α, β, γ le componenti di $\boldsymbol{s}$ (coseni direttori di S_i) rispetto a T, α', β', γ' e $\alpha'', \beta'', \gamma''$ rispettivamente quelle di $\boldsymbol{s}'$ ed $\boldsymbol{s}''$ e p, q, r e p', q', r' rispettivamente quelle di $\boldsymbol{\Omega}$ e $\boldsymbol{\Omega}'$ e posto

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} ,$$

l'equazione stessa si scrive

$$(3\alpha \boldsymbol{s}'^2 + \alpha'') p + (3\beta \boldsymbol{s}'^2 + \beta'') q + (3\gamma \boldsymbol{s}'^2 + \gamma'') r - (p' \alpha' + q' \beta' + r' \beta') + \Delta = 0 .$$

Ad ogni stella corrisponde una equazione fra p, q, r e p', q', r': occorreranno dunque, *al minimo*, sei stelle per la determinazione di $\boldsymbol{\Omega}$ e $\boldsymbol{\Omega}'$. Determinati questi valori, il sistema (3) fornisce per ogni stella valori perfettamente determinati pei rapporti $\varrho : \varrho'$ e $\varrho'' : \varrho'$. La contemporanea determinazione diretta delle ϱ' per via spettroscopica assicurerà quindi, per via rigorosa e senza nessuna concessione all'empirismo, la conoscenza delle ϱ_i (distanze delle stelle). Le componenti dei vettori $\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0$ sono poi fornite dalle (1).

Pubblicherò fra breve il metodo con ogni dettaglio.