ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Le funzionali lineari continue e l'integrale di Cauchy.* Nota del dott. S. MANDELBROJT, presentata dal Socio VITO VOLTERRA [1].

1. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un campo semplicemente connesso D; per il teorema di Cauchy, si ha

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz = f(\xi), \tag{1}$$

l'integrale essendo esteso nel senso positivo su una curva chiusa qualunque racchiudente il punto ξ nel suo interno, e contenuta essa stessa nel campo D.

2. Osserviamo che si può enunciare un reciproco di questo teorema (e anche un teorema un po' più generale di questo reciproco) e che il teorema di Morera non è se non un caso particolare di questo reciproco. Ecco l'enunciato:

Essendo $f(z)$ limitata e continua nel campo semplicemente connesso D, se si ha per ogni curva C, contenente un punto fisso ξ e situata essa stessa in D,

$$\int_c \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz = a\,(\text{costante}), \tag{2}$$

l'integrale essendo preso sempre nello stesso senso (p. es., positivo), $f(z)$ è olomorfa in D.

In un caso particolare si può supporre $a = 2\pi i\, f(\xi)$ quando C è percorsa nel senso diretto, e si ottiene la (1). Il teorema di Morera è un caso particolare di questo; infatti basta scrivere

$$\int_c f(z)\,dz = \int_c \frac{(z-\xi)\,f(z)}{z-\xi}\,dz = 0$$

poichè $f(z)\,(z-\xi)$ è olomorfa in D, come $f(z)$, poichè questa è supposta limitata.

Per la dimostrazione di questo teorema, consideriamo una curva chiusa ABCDA che non contenga il punto ξ. Sia AKC una curva tale che la curva chiusa AKCBA contenga il punto ξ; la curva chiusa AKCDA lo conterrà pure. Si ha allora

$$\int_{\text{ABCDA}} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz = \int_{\text{AKCDA}} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz + \int_{\text{ABCKA}} \frac{f(z)}{z-\xi}\,dz = a - a = 0\,.$$

[1] Presentata nella seduta del 7 dicembre 1924.

Se z_0 è un punto fisso del campo D, da cui sia stato preventivamente escluso un piccolo cerchio γ attorno a ξ, e z un punto qualunque dello stesso campo, si vede che l'espressione $\int_{z_0}^{z} \frac{f(z)}{z-\xi} dz$ ci fornisce una funzione analitica $\varphi(z)$ su una superficie di Riemann (senza punto singolare sulle parti che non contengono ξ) la cui derivata è $\frac{f(z)}{z-\xi}$; ma questa funzione è, nel campo, finita e monodroma, e quindi in esso è anche olomorfa. Essendo γ piccolo quanto si vuole, ξ non può essere se non un punto singolare isolato per questa funzione. Lo stesso sarà allora per $f(z)$. Ma l'ultima funzione è supposta limitata in D; essa vi è dunque olomorfa.

3. Osserviamo, e questo ci sarà utile per il paragone con ciò che segue, che nel teorema del numero precedente si può supporre che (2) abbia luogo solamente per le curve che ammettono delle tangenti, o anche che le funzioni $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ che compaiono nelle equazioni della curva C

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{array}\right\} 0 \leq t \leq 2\pi \qquad \begin{array}{l} \varphi_1(0) = \varphi_1(2\pi) \\ \varphi_2(0) = \varphi_2(2\pi) \end{array},$$

abbiano le derivate $\varphi_1'(t)$, $\varphi_2'(t)$.

4. Sia $\mathrm{F}|[\psi(t)]|_0^{2\pi}$ una funzionale lineare e continua (reale) definita nel campo delle funzioni di quadrato sommabile. Si suppone sempre, in questo caso, che il valore della funzionale sia lo stesso per tutte le funzioni che hanno la stessa funzione sommatrice in ogni intervallo (a, b), $(o \leq a < a\, b \leq 2k)$. Per il teorema di Fréchet si sa che esiste una funzione $\mathrm{T}(t)$ di quadrato sommabile tale che

$$\mathrm{F}|[\psi(t)]|_0^{2\pi} = \int_0^{2\pi} \psi(t) \cdot \mathrm{T}(t)\, dt$$

per $\psi(t)$ qualunque del campo ([1]).

5. Dimostriamo ora il teorema seguente: *Essendo* $\theta(z) = \theta_1(x, y) + i\,\theta_2(x, y)$ *una funzione immaginaria* (senza supporre niente sull'analiticità) *in un campo semplicemente connesso* D *della variabile immaginaria, se si ha per ogni curva* C, *definita dalle equazioni*

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{array}\right\} 0 \leq t \leq 2\pi \qquad \begin{array}{l} \varphi_1(0) = \varphi_1(2\pi) \\ \varphi_2(0) = \varphi_2(2\pi) \end{array}$$

dove $\varphi_1'(t)$ e $\varphi_2'(t)$ *esistono* (si suppone che C sia percorsa nel senso diretto quando t varia da 0 a 2π) *e che contiene un punto variabile* $\eta + i\xi$ *nel*

([1]) Per il teorema di Fréchet v. Paul Lévy, *Leçons sur le calcul fonctionnel*, Paris 1922.

suo interno,

$$(3)\quad \frac{1}{2\pi i}\mathrm{F}\left|\left[\frac{\theta_1[\varphi_1(t),\varphi_2(t)]+i\theta_2[\varphi_1(t),\varphi_2(t)]}{\varphi_1(t)+i\,\varphi_2(t)-(\eta+i\xi)}[\varphi_1'(t)+i\,\varphi_2'(t)]\right]_0^{2\pi}\right| = \theta(\eta+i\xi),$$

la funzione $\theta(z)$ é olomorfa in D *e si ha, per ogni funzione $\psi(t)$ di quadrato sommabile.*

$$\mathrm{F}|[\psi(t)]_0^{2\pi}| = \int_0^{2\pi}\psi(t)\,dt.$$

6. Facciamo l'osservazione seguente : Si considerino i seguenti tre fatti separati :

I) la funzione $\theta(z)$ è una funzione olomorfa ;

II) per ogni funzione $\psi(t)$ di quadrato sommabile si ha

$$\mathrm{F}|[\psi(t)]_0^{2\pi}| = \int_0^{2\pi}\psi(t)\,dt;$$

III) per la funzionale F e la funzione $\theta(z)$ si ha l'eguaglianza (3) per ogni curva C specificata e per ogni punto $\eta+i\xi$.

Si vede che nel teorema di Cauchy si suppone I e II e si ha per conseguenza III. Nel teorema del n. 2 si suppone II e III e si ricava I (il teorema del n. 2 è anche un po' più generale, poichè si può supporre fisso $\eta+i\xi$).

Nel teorema del n. 5 noi supponiamo III e ne deduciamo I e II.

7. Dimostriamo questo teorema. Se $\left|\frac{z_1-z_2}{z-z_2}\right|<1$, si ha

$$(4)\qquad \frac{1}{z-z_1}=\sum_0^\infty{}_n\frac{(z_1-z_2)^n}{(z-z_2)^{n+1}}$$

e, essendo F lineare e continua, si ha, da (3) e (4),

$$\frac{1}{2\pi i}\mathrm{F}\left|\left[\frac{\theta_1(\varphi_1,\varphi_2)+i\,\theta_2(\varphi_1,\varphi_2)}{\varphi_1+i\varphi_2-z_1}(\varphi_1'+\varphi_2')\right]\right| =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\Sigma(z_1-z_2)^n\,\mathrm{F}\left|\left[\frac{\theta_1(\varphi_1,\varphi_2)+i\,\theta_2(\varphi_1,\varphi_2)}{(\varphi_1+i\varphi_2-z_2)^{n+1}}(\varphi_1'+i\,\varphi_2')\right]\right|=\theta(z_1)$$

dove φ_1 e φ_2 sono funzioni di t. Si vede dunque che $\theta(z)$ è analitica.
Si ha inoltre

$$\frac{1}{2\pi i}\mathrm{F}\left|\left[\frac{\theta_1(\varphi_1,\varphi_2)+i\,\theta_2(\varphi_1,\varphi_2)}{(\varphi_1+i\varphi_2-z_2)^{n+1}}(\varphi_1'+i\,\varphi_2')\right]\right|=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{\theta(z)}{(z-z_2)^{n+1}}\,dz$$

per $n=0,1,2,.$

Supponiamo $z_2 = 0$, e sia C un cerchio di centro O e di raggio r; si ha allora

$$(5)\quad F\left|\left[\left((\theta_1(\varphi_1\,\varphi_2) + i\,\theta_2(\varphi_1\,,\varphi_2)\right)\left(\cos nt - i \operatorname{sen} nt\right)\right]\right| =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\theta_1(\varphi_1\,,\varphi_2) + i\,\theta_2(\varphi_1\,,\varphi_2)\,(\cos nt - i \operatorname{sen} nt)\right] dt\,.$$

Per la parte reale abbiamo

$$F\left|\left[\theta_1(\varphi_1\,,\varphi_2)\cos nt \overset{2\pi}{\underset{0}{+}} \theta_2(\varphi_1\,,\varphi_2)\operatorname{sen} nt\right]\right| =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\theta_1(\varphi_1\,,\varphi_2)\cos nt + \theta_2(\varphi_1\,,\varphi_2)\operatorname{sen} nt\right] dt\,.$$

Dovrebbe dunque essere, per il teorema di Fréchet,

$$\int_0^{2\pi}\left[\theta_1(\varphi_1\,\varphi_2)\cos nt + \theta_2(\varphi_1\,\varphi_2)\operatorname{sen} nt\right] T(t)\,dt =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left[\theta_1(\varphi_1\,\varphi_2)\cos nt + \theta_2(\varphi_1\,,\varphi_2)\operatorname{sen} nt\right] dt\,,$$

cioè

$$(6)\qquad \int_0^{2\pi}\left[\theta_1(\varphi_1\,,\varphi_2)\cos nt + \theta_2(\varphi_1\,,\varphi_2)\operatorname{sen} nt\right]\left[T(t) - 1\right] dt = 0\,,$$

essendo $T(t)$ una funzione di quadrato sommabile. Analogamente, per la parte immaginaria di (5),

$$(7)\qquad \int_0^{2\pi}\left[\theta_2(\varphi_1\,\varphi_2)\cos nt - \theta_1(\varphi_1\,\varphi_2)\operatorname{sen} nt\right]\left[T(t) - 1\right] dt = 0\,.$$

Bisogna dimostrare che

$$(8)\qquad T(t) = 1 \text{ identicamente.}$$

8. Se la funzione $\theta(z)$ è una costante, la cui parte reale è eguale, in valore assoluto, al coefficiente dell'immaginario, la (8) risulta immediatamente da (6) e (7); sommando e sottraendo, si ha infatti

$$\int_0^{2\pi}\left[T(t) - 1\right]\cos nt\,dt = 0 \qquad \int_0^{2\pi}\left[T(t) - 1\right]\operatorname{sen} nt\,dt = 0\,.$$

Se $\theta(z)$ non è una tale costant, si può supporre che nel punto o si abbia $\theta(0) = a + i\,b$ con $|a| \neq |b|$ (se fosse in un altro punto, lo si porterebbe al punto o); supponiamo $|a| > |b|$, e sia $|a| - |b| < 2\varepsilon$. Si può prendere attorno al punto o un cerchio di raggio r abbastanza piccolo perchè sulla circonferenza sia

$$|\theta_1(x\,,y)| > |a| - \varepsilon \qquad |\theta_2(x\,,y)\,| < |b| + \varepsilon\,,$$

e allora

(9) $$\theta_1^2(x_1\, y) - \theta_2^2(x_1\, y) > 0 \,.$$

Indichiamo con a_n, b_n i coefficienti di Fourier della funzione

$$\theta_1(\varphi_1\,,\,\varphi_2)\,[\mathrm{T}(t) - 1]$$

e con c_n, d_n i coefficienti corrispondenti di

$$\theta_2(\varphi_1\,,\,\varphi_2)\,[\mathrm{T}(t) - 1]$$

[queste serie esistono poichè $\mathrm{T}(t) - 1$ è di quadrato sommabile e

$$\theta_1(x\,,\,y)\,,\,\theta_2(x\,,\,y)$$

sono continue e limitate, e così pure i due integrali

$$\int_0^{2\pi} \theta_1^2(\varphi_1\,\varphi_2)\,[\mathrm{T}(t) - 1]^2\,dt\,,\; \int_0^{2\pi} \theta_2^2(\varphi_1\,\varphi_2)\,[\mathrm{T}(t) - 1]^2\,dt$$

esistono]. Si ha

$$a_n = \int_0^{2\pi} \theta_1(\varphi_1\,\varphi_2)[\mathrm{T}(t) - 1]\cos nt\,dt\;,\; b_n = \int_0^{2\pi} \theta_1(\varphi_1\,\varphi_2)\,[\mathrm{T}(t) - 1]\,\mathrm{sen}\, nt\,dt,$$

$$c_n = \int_0^{2\pi} \theta_2(\varphi_1\,\varphi_2)\,[\mathrm{T}(t) - 1]\cos nt\,dt\;,\; d_n = \int_0^{2\pi} \theta_2(\varphi_1\,\varphi_2)\,[\mathrm{T}(t) - 1]\,\mathrm{sen}\, nt\,dt\,;$$

e da (6) e (7) segue

(10) $$a_n = -\,d_n \qquad b = c_n\,.$$

Ma, essendo $\mathrm{K}(t)$ una qualsiasi funzione di quadrato sommabile e α_n, β_n i suoi coefficienti di Fourier, si ha

$$2\pi \int_0^{2\pi} \mathrm{K}^2(t)\,dt = \Sigma(\alpha_n^2 + \beta_n^2)\,.$$

Si ha dunque

$$2\pi \int_0^{2\pi} \theta_1^2(\varphi_1\,,\,\varphi_2)\,[\mathrm{T}(t) - 1]^2\,dt = \Sigma\,(a_n^2 + b_n^2)$$

$$2\pi \int_0^{2\pi} \theta_2^2(\varphi_1\,,\,\varphi_2)\,[\mathrm{T}(t) - 1]^2\,dt = \Sigma\,(c_n^2 + d_n^2)$$

e da (10) segue

$$\int_0^{2\pi} \Big[\theta_1^2(\varphi_1\,,\,\varphi_2) - \theta_2^2(\varphi_1\,,\,\varphi_2)\Big]\Big[\mathrm{T}(t) - 1\Big]^2 dt = 0\,.$$

Ma il primo fattore che compare sotto il segno d'integrale è, per (9), sempre positivo; da cui segue $\mathrm{T}(t) = 1$ per tutti i valori di t, salvo, al più, un insieme di misura nulla: ma allora possiamo supporre $\mathrm{T}(t) = 1$ dovunque.