# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA NAZIONALE

## DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

# RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXXIII.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

**Relatività.** — *Considerazioni generali sui campi einsteiniani a simmetria assiale.* Nota di Paolo Straneo, presentata dal Socio A. Di Legge [1].

In due Note precedenti ho ripetutamente accennato ad una grave difficoltà di principio che rende quasi nulla la possibilità di applicare rigorosamente la teoria di Weyl a problemi concreti, senza una previa sua notevole generalizzazione.

Nella presente Nota discuto più ampiamente tale questione, perchè mi pare di evidente utilità stabilire esattamente la portata fisica di quest'elegante teoria che, potendo, come è noto, fornire senza difficoltà infinite soluzioni formali delle equazioni einsteiniane statiche a tensore energetico nullo, parrebbe a prima vista dover essere pure utilissima per la risoluzione di altrettanti problemi concreti.

Vedremo invece che, date le sue limitazioni attuali, essa potrebbe prestarsi, oltre che alla nota determinazione del campo di gravitazione di un punto materiale, solamente alla determinazione dei *campi gravitazionali di masse distribuite illimitatamente*, in modo continuo, o anche discontinuo, *su di un asse, su di un piano, o anche nello spazio* (in questi ultimi due casi, s'intende, simmetricamente intorno ad un asse), *sempre però alla condizione che tali masse possano rimanere costantemente in equilibrio in virtù delle sole loro mutue attrazioni*, cioè senza intervento nè di alcun vincolo, nè di alcun'altra azione fisica.

Ma disgraziatamente vedremo pure che *tali distribuzioni di masse*, mentre hanno un significato sufficientemente preciso nella fisica classica, *sono assolutamente incompatibili colla teoria einsteiniana della gravitazione.*

Brevi richiami di concetti fondamentali. — **1.** Nelle **10** equazioni gravitazionali di Einstein

$$[1] \qquad G_{ik} - \frac{1}{2} G g_{ik} = - k T_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

in cui i simboli hanno i consueti, ormai notissimi, significati, il tensore energetico di componenti $T_{ik}$ sta ad esprimere il complesso di tutte le azioni fisiche, *ad eccezione della sola gravitazione.* A scanso di equivoci, che si sono verificati spesso, occorre tener presente che contribuiscono alla produ-

[1] Presentata nella seduta del 16 novembre 1924.

zione di questo tensore energetico anche tutti i fenomeni di reazione contro la gravità.

Per fissar le idee con un esempio, ricordiamo che il campo di masse puntiformi *libere*, sulle quali non si eserciti altra azione fisica che non sia la loro mutua gravitazione, è retto dalle equazioni [1] quando si ponga eguale a zero il secondo membro; mentre che il campo delle stesse masse, nell'ipotesi che esse siano mantenute relativamente *fisse*, sarebbe retto dalle stesse equazioni [1] coll'opportuno tensore energetico, dipendente dalla maniera con cui le dette masse vengono relativamente fissate.

Circa la determinazione dei tensori $T_{ik}$ corrispondenti ai varii possibili problemi, non si sa assolutamente nulla di positivo.

Ad ogni modo le equazioni [1] nella loro forma generale, con o senza tensore energetico, non si sanno integrare esattamente.

**2.** Si è perciò, fin dagli inizii, della teoria, fissata specialmente l'attenzione sulle *equazioni statiche*, che si deducono dalle [1] supponendo il campo gravitazionale *costante nel tempo*. In tale ipotesei, 3 delle predette equazioni divengono identicamente nulle e le altre 7 possono esser poste sotto varie forme. Assumiamo quella del Levi-Civita, notissima ai lettori di questi Rendiconti:

$$[2]\quad \mathfrak{M} = k\frac{T_{00}}{V^2}\ ,\quad \alpha_{ik} + \frac{V_{ik}}{V} - \frac{\Delta_2 V}{V}a_{ik} = -k\,T_{ik}\qquad (i\,,k=1\,,2\,,3)$$

in cui, essendo stata assunta *a priori* per il $ds^2$, come è evidentemente lecito, la forma

$$ds^2 = V^2\,dt^2 - \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\,dx_i\,dx_k\ ,$$

rappresentano: $\mathfrak{M}$ la curvatura media dello spazio, $\alpha_{ik}$ i noti simboli di Ricci, $V_{ik}$ le derivate covarianti della funzione $V(x_1\,,x_2\,,x_3)$, tutto con riferimento alla forma fondamentale ternaria $\sum_{1}^{3}{}_{ik}\, a_{ik}\,dx_i\,dx_k$. Si giunge pure, senza notevoli difficoltà e senza troppe ipotesi arbitrarie a stabilire che $T_{00}$ deve esprimere *la densità dell'energia* e le $T_{ik}$ (che sono in fondo le componenti per $i\,,k=1\,,2\,,3$ del tensore energetico delle equazione 1) le componenti degli sforzi nello spazio fisico, dovuti ai varii fenomeni, esclusa solamente la gravitazione.

Anche su questo tensore energetico $T_{ik}\,(i\,,k=1\,,2\,,3)$ possiamo dire ben poco. Solamente nel caso di pure azioni elettriche pare che si possa senz'altro identificarlo colla tensione maxwelliana.

SIMMETRIA CENTRALE. — **3.** Il sistema [2] ha così potuto esser integrato, fin dagli inizi della teoria, *nel caso della simmetria intorno ad un punto*, quando cioè il campo deve dipendere da una sola coordinata; e precisamente per $T_{00} = T_{ik} = 0$ (soluzione notissima di Schwarzschild, corrispondente ad un punto materiale, dedotta, anche in queste notazioni del Levi-Civita, dal

Palatini) e per $T_{00}$ e $T_{ik}$ conformi al caso maxwelliano più semplice (soluzione corrispondente ad una carica elettrica puntiforme, dedotta da varii autori e dalla sig.na Longo in queste notazioni).

Problemi ove si verifichi ancora la simmetria sferica, in cui però le masse più non siano supposte puntiformi, ma diffuse simmetricamente intorno ad un centro, sono stati tentati da varii autori; ma le incertezze inerenti ai tensori energetici da assumere lasciano molto perplessi sul valore fisico dei risultati ottenuti.

SIMMETRIA ASSIALE. — **4.** La teoria Weyl-Levi-Civita ha pure permesso di dedurre varii integrali delle equazioni [2] nell'ipotesi della simmetria intorno ad un asse e dell'annullarsi del tensore energetico, come abbiamo veduto e discusso nelle Note precedenti.

Ma in questa *forzata coincidenza della staticità e dell'annullarsi del tensore energetico* sta appunto il lato debole di questa teoria.

**5.** Per vederlo facilmente, consideriamo due punti materiali, *liberi*, perchè le equazioni einsteiniane possano essere a tensore nullo. I due punti si attireranno e muoveranno l'uno verso l'altro; il campo non potrà esser statico e quindi si dovrebbero usare le equazioni [1] annullandovi il tensore energetico, e non le [2].

Si potrebbe però, per poter adoperare le equazioni [2], far l'ipotesi di fissare relativamente le due masse, per es. per mezzo di un puntello inserito fra di loro e supposto privo di massa. Ma tale puntello sarebbe, nell'ipotesi più semplice, soggetto ad uno sforzo di compressione.

Ora noi sappiamo che qualsiasi sforzo perturba il campo di gravitazione, anzi produce esso stesso un campo che si compone coi capi preesistenti. Perciò potremmo adoperare le equazioni [2], ma solamente alla condizione di non sopprimervi il tensore energetico, anzi di esprimerlo opportunamente.

Questa grande difficoltà infirma evidentemente il valore fisico delle soluzioni formali di Chazy, Palatini e anche della mia, ricordata nella Nota precedente.

**6.** Ma vi è di peggio. Questa difficoltà investe tutte le altre soluzioni trovate finora: per es. la mia per un ellissoide, data colla formula [4] della Nota citata. Perchè, o la materia costituente il corpo simmetrico considerato si suppone disgregata, e in tal caso l'attrazione mutua fra le particelle tenderà a smuoverle e condensarle in una sfera di sempre maggior densità, ragione per cui non sarà lecito di far l'ipotesi della staticità; o la materia sarà coerente, o comunque sostenuta da superficie, puntelli, vincoli ecc., e allora si avranno sforzi di tensione, pressione, distorsione, per cui non sarà lecito di usare equazioni a tensore energetico nullo.

**7.** A questo punto è logico di chiedersi: esistono casi concreti ai quali la teoria in questione possa essere senz'altro applicata?

E pare ovvia la risposta affermativa quando le masse disgregate dello spazio fisico siano distribuite, oltre che simmetricamente, anche in modo da dover rimanere in equilibrio (stabile o non stabile, poco importa) sotto l'azione delle loro mutue attrazioni.

Ma quali possono essere queste distribuzioni? Prescindendo dal caso ideale delle masse che hanno raggiunta la loro massima concentrazione intorno a un centro e quindi più non tendono a condensarsi ulteriormente (punto materiale), possono evidentemente soddisfare alla precedente condizione solamente *particolari distribuzioni illimitate* di masse disgregate, distese su di un asse (colla loro massima concentrazione radiale), su di un piano (colla loro massima concentrazione nel senso normale), o nello spazio. Per es. si può ritenere che debbano esser trattabili colle equazioni [2], ridotte a tensore energetico nullo, i problemi della *distribuzione uniforme* di una massa *su di un asse, su di un piano* e anche nello spazio, come pure un' infinità di analoghi problemi con distribuzioni non uniformi, o anche discrete, purchè in stato di equilibrio.

Si presenta così opportuno il desiderio di risolvere qualcuno di questi problemi per utilizzare praticamente l' interessante teoria. Studiamone perciò rapidamente i due più semplici.

MASSA DISTRIBUITA UNIFORMEMENTE INTORNO AD UN ASSE. — **8** Seguendo il criterio indicato nella Nota precedente e le corrispondenti interpretazioni, cerchiamo di renderci anzitutto conto da quale distribuzione delle masse nello spazio euclideo ausiliario si debba partire.

Supponiamo in primo luogo le masse nello spazio fisico ridotte, senza alterazione del loro campo esterno, alla loro massima condensazione possibile su di una superficie, che sarà evidentemente un cilindro intorno all'asse stesso e di cui indicheremo il raggio, per ora incognito, con $r_0$.

Consideriamo poi, sulla superficie $\sigma$ ($\varphi = \text{cost.}$), le linee di flusso e di egual potenziale $r = \text{cost.}$ e $z = \text{cost.}$

Indipendentemente poi dalla metrica (essa pure per ora incognita) di questa superficie, per ragioni di simmetria potremo ritenere quelle linee rispettivamente parallele e normali all'asse $r = 0$ e quindi tendenti a confondersi con coordinate cartesiane quando, crescendo la $r$, la metrica della superficie $\sigma$ tenderà a divenire euclidea.

La rappresentazione poi della $\sigma$ su di un piano, colla condizione di alterare il meno possibile la distribuzione delle masse, sarà allora evidentemente quella che, lasciando senz'altro inalterato quel reticolo di linee isoterme per $r$ grandissimo, porterà invece tutte le altre a coincidere con altrettante rette equidistanti fra di loro e rispettivamente parallele e normali all'asse. La costante $r_0$ in tale trasformazione assumerà un valore, pure costante, che diremo $r'_0$.

L'ultima trasformazione finalmente, che deve condurci alle coordinate canoniche di Weyl, consterà poi semplicemente in uno scorrimento, di importo $r'_0$, di TUTTO *il reticolo suddetto*, nel senso delle $r'$ decrescenti. Essa porterà evidentemente tutte le masse sull'asse senza alterarne la distribuzione.

Possiamo perciò ritenere che, per costruire il $ds^2$ corrispondente ad *una distribuzione uniforme intorno all'asse nello spazio fisico*, occorra partire da una funzione $\nu$ corrispondente al potenziale newtoniano simmetrico della *stessa massa uniformemente distribuita su di un asse dello spazio euclideo rappresentativo*. Ed è questo uno dei pochissimi casi di esatta coincidenza delle due distribuzioni.

Il problema potrebbe così parere virtualmente risolto.

9. Se non che, si presenta subito una difficoltà formale che, ben considerata, ha un notevole significato fisico.

Il potenziale newtoniano di una retta portante una distribuzione di massa di densità $k$, non infinitamente piccola, è *infinito*. Però, essendo finite e determinate le forze dovute all'attrazione newtoniana di tale retta, è invalso l'uso di considerare in sua vece la funzione $-k \log r/r_0$, le cui derivate negative coincidono appunto con quelle forze.

Ora possiamo noi nella costruzione di $ds^2$ secondo la teoria di Weyl assumere come $\nu$ questa funzione delle forze, invece della funzione potenziale?

La risposta non può esser dubbia. Ricordiamo perciò che il $ds^2$ cercato deve poter esser posto sotto la forma

$$ds^2 = V_0^2\, e^{2\nu}\, dt^2 - e^{-2\nu} \{ r^2\, d\varphi^2 + e^{2\lambda} (dr^2 + dz^2) \}$$

con

$$d\lambda = r \left[ \left( \frac{\partial \nu}{\partial r} \right)^2 - \left( \frac{\partial \nu}{\partial z} \right)^2 \right] dr + 2r \frac{\partial \nu}{\partial r} \frac{\partial \nu}{\partial z}\, dz ,$$

per cui $\lambda$, e quindi la funzione $e^{2\lambda}$ che appare nella parte spaziale del $ds^2$, dipendendo solamente dalle derivate della $\nu$, hanno nei due casi gli stessi valori. Ma non avviene altrettanto per la $\nu$ e quindi per la $e^{-2\nu}$, che in un caso avrebbe costantemente il valore *zero* e nell'altro un valore compreso tra *uno* e *infinito*.

Possiamo perciò concludere senz'altro che il $ds^2$ che si ottiene assumendo per la $\nu$ l'espressione $\nu = -k \log r/r_0$, ossia

$$ds^2 = V_0^2 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2k} dt^2 - \left( \frac{r_0}{r} \right)^{2k} \left\{ r^2\, d\varphi^2 + \left( \frac{r}{r_0} \right)^{2k^2} (dr^2 + dz^2) \right\},$$

è senza dubbio una soluzione delle equazioni einsteiniane, ma non può esser una soluzione del nostro problema.

**10.** A questo punto può essere interessante, prima di tentarne la ricerca per altra via, di chiedersi se nella teoria einsteiniana il problema discusso abbia un qualche senso fisico o se per avventura non ne sia totalmente privo.

Coll'equazione [3] della citata seconda Nota abbiamo dato il $ds^2$ che corrisponde a qualsiasi distribuzione omogenea $k$ su di un segmento di lunghezza $2a$, dello spazio euclideo ausiliario. Considerando un segmento sempre più lungo, cioè facendo tendere all'infinito la costante $a$, dovremmo trovare la soluzione del nostro problema se essa esiste. Ma è facile di vedere che, in tal caso, non solo per $k = 1$ ma per qualsiasi valore di $k$, anche piccolissimo, purchè non infinitesimo, la soluzione perde ogni significato fisico, perchè *la nota singolarità*, così caratteristica della teoria einsteiniana, la quale pone un limite alla concentrazione (anche teorica) delle masse, *invade allora tutto lo spazio*.

Rimane così confermato, anche colla teoria di Weyl, ciò che in fondo avrebbe già quasi dovuto essere intuitivo dopo la determinazione e la discussione fatta da Schwarzschild del $ds^2$ conveniente al campo di un *punto materiale* e della sua caratteristica singolarità: che cioè *nello spazio fisico einsteiniano non vi è posto per una massa materiale infinita.*

Massa distribuita uniformemente su di un piano. — **11**. Il senso fisico ci dice senz'altro che alla conclusione precedente si debba giungere a più forte ragione quando si consideri una massa distribuita uniformemente, per es. su di un disco, il cui raggio tenda all'infinito.

Ma in via di abbondanza ricordiamo ancora, senza sviluppare i calcoli per deficienza di spazio, che non è difficile di determinare un $ds^2$ che abbia, rispetto ad un *ellissoide rotondo appiattito*, un comportamento analogo a quello del $ds^2$ precedentemente citato [4 della Nota II] rispetto ad un *ellissoide allungato*. Tale $ds^2$ dovrebbe ridursi alla soluzione del nostro problema quando si facesse tendere in esso all'infinito il valore della costante che corrisponde alla lunghezza dei due assi eguali.

Ma anche in quel caso si verificherebbe la stessa estensione, oltre ogni limite, della corrispondente singolarità, e la soluzione perderebbe ogni possibile significato fisico.

Conclusione generale. — **12**. Da quanto abbiamo detto nel complesso di queste tre Note, risulta evidente lo stato sconfortante in cui si trova la ricerca di soluzioni di problemi *effettivamente fisici*, secondo la teoria einsteiniana.

Delle equazioni *generali*, in cui il campo può variare in funzione del tempo, *non* conosciamo alcun integrale.

Delle equazioni ridotte *al caso statico* conosciamo due soli integrali rigorosi corrispondenti a due problemi fisici determinati, in cui si verifica la condizione semplificatrice della *simmetria centrale*.

La teoria iniziata dal Weyl, e in seguito perfezionata dal Levi-Civita, ci ha bensì posto nella condizione di saper costruire, nel caso della *simmetria assiale*, infinite soluzioni particolari delle equazioni einsteiniane a tensore energetico nullo. Ma disgraziatamente a tali soluzioni *non* corrisponde un preciso senso fisico se non in qualche caso particolare in cui, esistendo infiniti assi di simmetria, si ritorna alla simmetria centrale.

Per affrontare effettivamente problemi concreti, occorre integrare le equazioni einsteiniane *senza la restrizione della staticità*, o almeno *senza quella della simultanea nullità del tensore energetico*.

La prima questione pare, per ora, trascendere la potenzialità dei nostri mezzi analitici; sulla seconda mi propongo invece di ritornare quanto prima e comunicare risultati abbastanza generali.