ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

NOTE PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia durante le ferie del 1924.

(Ogni Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo).

Matematica. — *Condizione per la razionalità della varietà delle coppie di punti di due superficie algebriche distinte o coincidenti.* Nota di GIACOMO ALBANESE, presentata dal Corrispondente SEVERI [1].

In questa breve Nota dimostro che se la varietà W delle coppie di punti di due superficie algebriche F ed F′ è razionale, tali sono necessariamente F ed F′.

Ne è corollario immediato che: la varietà delle coppie ordinate di punti di una superficie F è razionale quando, e solo quando, F è razionale.

Più importante è però l'estensione del teorema alle varietà W^* delle coppie di punti *non ordinate* di F, per la quale trovo analogamente che essa è razionale soltanto quando è razionale F.

La stessa condizione, profittando di una condizione di Castelnuovo per la razionalità di una superficie [2], si può esprimere dicendo che: W^* è razionale quando, e solo quando, il suo bigenere P_2 e la sua irregolarità superficiale q_2 [3], siano entrambi nulli:

$$P_2 = q_2 = 0.$$

[1] Presentata nella seduta del 17 febbraio 1924.

[2] Castelnuovo, *Alcuni risultati* ecc. Memorie della Società italiana delle scienze, serie III, tomo X, 1896.

[3] Castelnuovo-Enriques, *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions,* Annales scientifiques de l'École normale supérieure (Paris), 3e série, t. XXIII, 1906.

Al prof. Severi, che gentilmente mi propose di studiare la questione, i miei migliori ringraziamenti.

1. Siano F ed F′ due superficie algebriche e W la varietà a quattro dimensioni che rappresenta birazionalmente, e senza eccezioni, le coppie di punti di F ed F′.

È ovvio che se F ed F′ sono entrambi razionali, la varietà W è razionale.

Viceversa, supponiamo che W sia razionale, sia cioè in corrispondenza birazionale coi punti di uno spazio lineare S_4.

Al sistema delle ∞^6 rette di S_4, corrisponderà in W un sistema di ∞^6 curve razionali R. E presi due punti generici di W, per essi passerà una ed una sola curva R.

Al variare sopra R di un punto (M, M′), i punti corrispondenti M, M′ sopra F ed F′ descriveranno due curve r ed r' (¹).

Indichiamo con $k \geq 1$ il numero dei punti dove R incontra ogni superficie F'_M di W, che si ottiene accoppiando ad ogni punto M di r tutti i punti di F′.

Fra le due curve R ed r intercede allora una corrispondenza $(k, 1)$ che fa corrispondere ad ogni punto di R (che è razionale) uno ed un solo punto di r, e ad ogni punto di r, k punti di R.

Per il teorema di Lüroth r è allora razionale. E siccome sopra F esistono più che ∞^1 curve r, possiamo concludere che F è razionale (²).

Lo stesso ragionamento applicato ad R ed r', ci porta analogamente a concludere che anche F′ è razionale e possiamo enunciare il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la varietà delle coppie di punti di due superficie algebriche F *ed* F′ *sia razionale, è che* F *ed* F′ *siano entrambe razionali.*

2. Lo stesso ragionamento, applicato alla varietà V a tre dimensioni, che rappresenta le coppie di punti di una curva algebrica C e di una superficie algebrica F, ci porta a concludere che V *è razionale allora, e solo allora, che* C *ed* F *siano razionali.*

Più in generale: se la varietà delle coppie di punti di una curva algebrica C (o di una superficie algebrica F) e di una varietà algebrica V_k a k dimensioni, è razionale, la curva C (o la superficie F) è necessariamente razionale.

(¹) Perchè sopra F (F′) la curva r (r') si riduca ad un punto M (M′), occorre che R, sopra W, giaccia per intero sulla superficie F'_M ($F_{M'}$) che si ottiene accoppiando ad M (M′) tutti i punti di F′ (F): questo è però impossibile se R passa per due punti generici di W.

(²) Castelnuovo, *Sulle superficie algebriche che contengono una rete di curve iperellittiche.* Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. III, 1° sem. 1894, n. 1. Oppure: Humbert, *Sur une classe de surfaces à génératrices rationelles.* Comptes-rendus de l'Académie des Sciences, 1893.

3. Supponiamo F ed F′ in corrispondenza birazionale senza eccezione. La varietà W rappresenta allora la varietà delle coppie ordinate di punti della superficie F, epperò si ha:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la varietà delle coppie ordinate dei punti di una superficie algebrica F *sia razionale, è che* F *sia razionale.*

4. Consideriamo ora la varietà W^* delle coppie *non ordinate* di punti di una superficie algebrica F. Accoppiando ad ogni punto P di F tutti i punti di F, si ottiene sopra W^* una superficie F_p, in corrispondenza birazionale con F.

Al variare di P sopra F, la superficie F_p descriverà in W^* un sistema Σ, ∞^2, d'indice 2 e birazionalmente identico ad F.

Consideriamo in F un qualsiasi sistema continuo $\{C\}$ di curve C, ed indichiamo con $\{C_p\}$ il corrispondente sistema sopra la superficie F_p.

Se ad ogni punto, di ogni curva C, accoppiamo tutti i punti di F, si otterrà in W^* un sistema continuo $\{F_C\}$ di varietà a tre dimensioni, che staccherà sopra ogni superficie F_p il sistema sopra indicato con $\{C_p\}$.

Ciò detto, supponiamo che W^* abbia l'irregolarità superficiale, q_2, nulla, in maniera che ogni suo sistema continuo *completo*, di varietà a tre dimensioni, sia lineare. Due qualsiansi varietà F_C ed F_B di $\{F_C\}$ sono allora equivalenti (appartengono cioè al medesimo sistema lineare) e staccheranno sopra ogni superficie F_p due curve C_p e B_p equivalenti.

Conseguentemente, sopra F le due curve C e B sono equivalenti. Cioè due qualsiansi curve del sistema $\{C\}$ sono equivalenti, quanto dire che il sistema *completo* $\{C\}$ è lineare. Ossia, ogni sistema continuo completo di F è lineare e perciò F è regolare. Concludiamo:

Se W^* *ha l'irregolarità superficiale nulla, la superficie* F *è regolare.*

5. Indichiamo ora con $|\Gamma|$ il sistema canonico di W^* e con $|\Gamma_C|$ il sistema che esso segna sopra la varietà F_C sopra considerata.

Per determinare il sistema canonico di F_C, osserviamo che ogni varietà F_B di $\{F_C\}$ stacca sopra F_C la superficie (CB) delle coppie di punti di C e B e le superficie $F_{P_1}, F_{P_2}, \ldots, F_{P_n}$, corrispondenti ai punti P_1, $P_2, \ldots, P_n$ che le due curve C e B hanno a comune.

Al tendere di B verso C la superficie (CB), muovendosi in F_C, tende alla superficie doppia (CC) delle coppie di punti della curva C, e che è doppia per F_C; mentre le superficie $F_{P_1}, F_{P_2}, \ldots, F_{P_n}$, tendono alle superficie $F_{Q_1}, F_{Q_2}, \ldots, F_{Q_n}$, indicando con $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n)$ il gruppo caratteristico di C, a cui tende il gruppo $(P_1, P_2, \ldots P_n)$.

Quindi il sistema caratteristico di F_C, fuori la varietà doppia (CC) si riduce al sistema lineare

$$|F_{Q_1} + F_{Q_2} + \cdots + F_{Q_n}|.$$

Se ne deduce che sopra F_C il sistema canonico è dato dal sistema

$$|\Gamma_C + F_{Q_1} + F_{Q_2} + \cdots + F_{Q_n}|\,.$$

D'altra parte, detto $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_{2\pi-2})$ un gruppo canonico di C e con (DC) la superficie delle coppie di punti di C e di una curva canonica D di F, è facile verificare [1] che il sistema canonico di F_C è precisamente

$$|DC + F_{Q_1} + F_{Q_2} + \cdots + F_{Q_{2\pi-2}}|\,.$$

Dall'uguaglianza dei sistemi sopra scritti si ricava che

$$|\Gamma_C| = |DC + F_{Q_{n+1}} + \cdots + F_{Q_{2\pi-2}}|\,,$$

indicando con $(Q_{n+1}, \ldots, Q_{2\pi-2})$ un gruppo della serie che il sistema canonico $|D|$ di F stacca su C. Ora le superficie del secondo membro sono staccate su F_C dalle varietà F_D delle coppie di punti della superficie F e della curva D.

Facendo variare C su F, concludiamo che è $|\Gamma| = |F_D|$ e cioè:

Sulla varietà W^* *sono varietà canoniche le varietà delle coppie di punti di* F *e delle sue curve canoniche.*

Se ne ricava anche che, detti $|D_2|, |D_3|, \ldots$ i sistemi bicanonici, tricanonici .... di F, i sistemi $|F_{D_2}|, F_{D_3}|, \ldots$ sono i sistemi bicanonici, tricanonici .... di W^*.

6. Si supponga a questo punto che W^* sia priva di varietà bicanoniche, abbia cioè il bigenere $P_2 = 0$. La superficie F dovrà di conseguenza avere anch'essa il bigenere nullo. Sicchè, ricordando quanto si è detto alla fine del n. 4, se W^* ha nulli tanto il bigenere, quanto l'irregolarità superficiale, la superficie F ha analogamente nulli bigenere ed irregolarità, e per un noto teorema di Castelnuovo sarà razionale.

Ora se F è razionale, anche W^* è razionale. Se per esempio F è una quadrica, W^* corrisponde biunivocamente alle rette dello spazio ordinario ed è razionale. Possiamo perciò dire: *Se* W^* *ha nulli il bigenere e l'irregolarità superficiale, essa è razionale e tale è di conseguenza anche* F.

D'altra parte, se W^* è razionale, evidentemente il suo bigenere e la sua irregolarità superficiale sono nulli e possiamo concludere nei due modi:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la varietà W^* *delle coppie non ordinate di punti di una superficie* F *sia razionale, è che* W^* *abbia nulli il bigenere e la irregolarità superficiale*; oppure:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la varietà delle coppie non ordinate dei punti di una superficie algebrica F *sia razionale, è che* F *sia razionale.*

[1] Severi, *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche.* Rendic. Circolo matem. di Palermo, tomo XXVIII, 1909, n. 28.