ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Matematica. — *L' n^{esimo} numero primo come valore assintotico d'una funzione $\psi_n(s)$ dedotta dalla $\zeta(s)$ di Riemann.* Nota del dott. LUIGI FANTAPPIÈ, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA (¹).

1. Le questioni della teoria dei numeri primi possono raggrupparsi attorno a due problemi centrali che si possono considerare l'uno inverso dell'altro. Il più trattato finora è senza dubbio quello della determinazione del numero $\pi(x)$ dei numeri primi inferiori o uguali a un numero dato x. Per la determinazione assintotica di $\pi(x)$ è fondamentale il risultato, dovuto alle ricerche di Hadamard, che cioè $\pi(x) = \frac{x}{\log x}(1 + \varepsilon_x)$, $\lim\limits_{x \to \infty} \varepsilon_x = 0$, mentre per la determinazione esatta esistono una quantità di formule, fra cui mi limiterò a ricordare, per gli autori italiani, quella del prof. Levi-Civita (²), quella del dott. Sbrana (³), e due altre esposte in una mia recente Nota (⁴); per una bibliografia più ampia sull'argomento rimando alla nota opera del Landau (⁵).

Essendo $n = \pi(p_n)$ (indicando con p_n l' n^{esimo} numero primo), il problema di determinare p_n in funzione del suo numero d'ordine n può, in un certo senso, riguardarsi come l'inverso dell'altro Per la determinazione assintotica di p_n ricorderò l'espressione riportata dal Landau (op. cit., vol. I, pag. 213) $p = n \log n (1 + \varepsilon_n)$, $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$, e quelle più precise dei pro-

(¹) Pervenuta all'Accademia il 5 luglio 1924.

(²) T. Levi-Civita, *Di una espressione analitica atta a rappresentare il numero dei numeri primi compresi in un determinato intervallo*. Rend. Acc. Lincei, 1895, 1° sem.

(³) F. Sbrana, *Sul numero dei numeri primi inferiori a un limite assegnato*. Rend. Acc. Lincei, 1922, 2° sem

(⁴) L. Fantappiè, *Due semplici espressioni del numero dei numeri primi compresi entro limiti assegnati*. Rend. Acc. Lincei, 1924, 1° sem., pag. 215. A proposito di questa mia recente Nota debbo doverosamente riconoscere che la prima delle due formule da me date per l'espressione del numero dei numeri primi compresi entro limiti assegnati, ripete il metodo già usato dal prof. Andreoli fin dal 1912 in una sua Nota, che io ignoravo, dal titolo: *Sulla totalità dei numeri primi inferiori ad un limite assegnato* (Rend. Acc. Lincei, vol. XXI, 1912, 2° sem., pag. 404). Infatti, tanto la funzione $F(z)$ [o $\Phi(x)$], quanto l'integrale logaritmico della medesima erano da lui già state considerate. Il prof. Andreoli mi ha fatto inoltre rilevare che nella mia Nota resta determinato in modo esplicito che le radici reali sono doppie, e non hanno molteplicità superiore, e che pertanto all'integrale che vi comparisce si aggiunge il fattore $\frac{1}{2}$.

(⁵) E. Landau, *Die Verteilung der Primzahlen*. Leipzig, Teubner, 1909.

fessori Cesàro [1] e Cipolla [2], mentre per la *determinazione esatta* di p_n in funzione del suo numero d'ordine non credo che finora sia stata data alcuna espressione; ed è questo che mi propongo di fare succintamente nella presente Nota, impiegando le proprietà della funzione $\zeta(s)$ di Riemann, per s reale e tendente all'∞.

2. Osserviamo anzitutto che, *data una funzione* $f(s)$ *sviluppabile in una serie di Dirichlet*

$$f(s) = \sum_1^{\infty} {}_n \frac{a_n}{c_n^s} \tag{1}$$

$$c_1 < c_2 < \cdots < c_n < \cdots \tag{2}$$

in cui tutte le costanti a_n *siano uguali all'unità, è possibile calcolare immediatamente le costanti* c_n della serie stessa per mezzo delle formule di Waring [3]. In questo caso, infatti, $f(s), f(2s), \ldots f(ns)$ non sono altro che le somme delle potenze $1^e, 2^e, \ldots, n^{esime}$ dei numeri $\frac{1}{c_1^s}, \frac{1}{c_2^s}, \ldots \frac{1}{c_n^s}, \ldots$ e si avrà allora la somma $\Pi_n(s)$ dei prodotti a n a n di questi numeri colla formula

$$\Pi_n(s) = \sum_1^n {}_r \frac{(-1)^{n-r}}{r!} \mathop{\mathrm{S}}_n^r \frac{f(h_1 s)}{h_1} \cdot \frac{f(h_2 s)}{h_2} \cdot \ldots \cdot \frac{f(h_r s)}{h_r} \tag{3}$$

dove la somma $\mathop{\mathrm{S}}\limits_n^r$ deve essere estesa a tutte le soluzioni intere e positive dell'equazione $h_1 + h_2 + \cdots + h_r = n$; analogamente la somma $\Pi_{n-1}(s)$ dei prodotti a $n-1$ a $n-1$ sarà data da

$$\Pi_{n-1}(s) = \sum_1^{n-1} {}_r \frac{(-1)^{n-r-1}}{r!} \mathop{\mathrm{S}}_{n-1}^r \frac{f(h_1 s)}{h_1} \cdot \frac{f(h_2 s)}{h_2} \cdot \ldots \cdot \frac{f(h_r s)}{h_r}. \tag{4}$$

Nella serie di Dirichlet che rappresenta $\Pi_n(s)$ il primo termine, cioè il più grande, sarà, per (2), $\frac{1}{(c_1 c_2 \ldots c_n)^s}$, mentre nella serie che dà $\Pi_{n-1}(s)$ il primo termine sarà $\frac{1}{(c_1 c_2 \ldots c_{n-1})^s}$; dunque avremo

$$\frac{1}{c_1 c_2 \ldots c_n} = \lim_{s \to \infty} \Big[\Pi_n(s)\Big]^{\frac{1}{s}} \quad ; \quad \frac{1}{c_1 c_2 \ldots c_{n-1}} = \lim_{s \to \infty} \Big[\Pi_{n-1}(s)\Big]^{\frac{1}{s}}$$

$$c_n = \lim_{s \to \infty} \left[\frac{\Pi_{n-1}(s)}{\Pi_n(s)}\right]^{\frac{1}{s}}. \tag{5}$$

[1] Cesàro, *Sur une formule empirique de M. Pervouchine*. C. R. Acad. d. sc., Paris, *119*, 1894, pag. 848.

[2] Cipolla, *La determinazione assintotica dell' n^{esimo} numero primo*. Acc. d. scienze di Napoli, serie 3ª, 8, 1902, pag. 132.

[3] Ved. Cesàro, *Corso di analisi algebrica* (Torino, Bocca, 1894), pag. 361.

Si può dimostrare che la (5) sussiste anche se le a_n non sono eguali tutte all'unità, ma solo fino a un indice m per cui $c_1 c_2 \dots c_n < c_1^{2-1} c_{m+1}$, ma per tutti i complementi e sviluppi di questa Nota rimando al mio lavoro dello stesso titolo che sarà pubblicato prossimamente nel « Bulletin de la Société mathématique de France ».

3. È ben noto che si ha (Landau, op. cit., vol. I, pag. 128)

$$\log \zeta(s) = \sum_{nr}^{\infty} \frac{1}{r p_n^{rs}}$$

dove con $\log \zeta(s)$ intendiamo la determinazione reale del logaritmo della funzione $\zeta(s)$ di Riemann, per s reale e > 1. Se poniamo

$$\eta(s) = \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{1}{p_n^s} \tag{6}$$

sarà allora

$$\log \zeta(s) = \sum_{1}^{\infty}{}_r \frac{1}{r} \eta(rs)$$

da cui inversamente [1]

$$\eta(s) = \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{\mu(n)}{n} \log \zeta(ns) \tag{7}$$

dove $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ se n è divisibile per un quadrato, e $\mu(n) = \pm 1$ negli altri casi secondo che il numero dei fattori primi di n è pari o dispari. Poichè nella serie di Dirichlet (6) tutte le costanti a_n sono uguali all'unità e $c_n = p_n$, potremo applicare la formula (5) e avremo

$$p_n = \lim_{s \to \infty} \left[\frac{\Pi_{n-1}(s)}{\Pi_n(s)} \right]^{\frac{1}{s}} \tag{8}$$

dove $\Pi_n(s)$ è dato da

$$\Pi_n(s) = \sum_{1}^{n}{}_r \frac{(-1)^{n-r}}{r!} \mathop{\mathrm{S}}_{n}^{r} \frac{\eta(h_1 s)}{h_1} \cdot \frac{\eta(h_2 s)}{h_2} \cdot \dots \cdot \frac{\eta(h_r s)}{h_r}$$

e $\Pi_{n-1}(s)$ è dato da una formula analoga.

4. Nell'espressione (8) entra tuttavia, a causa della (7), la funzione aritmetica $\mu(n)$, ma nel mio lavoro già citato ho dimostrato che nella (8) si può sostituire a $\eta(s)$ un'altra funzione $\eta_n(s)$, *esprimibile linearmente, e senza ricorrere alla* $\mu(n)$, *per* $\log \zeta(s), \log \zeta(2s), \dots, \log \zeta(ks)$ $\left(\text{con } k = \frac{n(n-1)}{2}\right)$, che però, nel suo sviluppo in serie di Dirichlet, ha le sue costanti a_n uguali all'unità solo fino a un indice m per cui

$$c_1 c_2 \dots c_n < c_1^{n-1} c_{m+1},$$

il che basta, del resto, per poter applicare la formula (5).

[1] W. Scheibner, Zeitschr. Math. u. Phys., 5 (1860), pag. 236.