ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Matematica. — *Sulle equazioni algebriche contenenti linearmente un parametro e risolubili per radicali.* Nota di OSCAR ZARISKI, presentata dal Socio CASTELNUOVO [1].

O. Chisini [2] e I. F. Ritt [3] hanno completamente risolto, indipendentemente uno dall'altro, il problema seguente : data un'equazione algebrica

$$P(x) - t\,Q(x) = 0 \tag{1}$$

di grado primo p e contenente linearmente un parametro t, trovare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè essa sia risolubile per radicali. I risultati trovati dai due autori suddetti sono tali da permettere di riconoscere con la massima facilità, in ogni caso concreto, se un'equazione del tipo (1) sia o no risolubile per radicali. Con semplici considerazioni mi sono anzi persuaso che per tale riconoscimento occorrono soltanto *operazioni razionali*.

Ho cercato di generalizzare questi risultati per il caso in cui il grado dell'equazione (1) non sia un numero primo, ma un numero qualsiasi.

In questa Nota voglio esporre brevemente l'oggetto e i risultati della mia ricerca. Le relative dimostrazioni, troppo lunghe per essere svolte qui, saranno pubblicate altrove.

È noto che condizione necessaria e sufficiente affinchè un'equazione di grado primo sia risolubile per radicali in un dato campo di razionalità — e aggiungiamo subito che, trattandosi di un'equazione contenente un parametro t, noi assumiamo per tale campo quello di tutti i numeri complessi a cui si sia aggiunto il parametro t — è che tutte le sue radici siano esprimibili razionalmente (nel dato campo di razionalità) in funzione di due qualsiansi tra esse. Quest'ultima proprietà — che, nel caso in cui il grado dell'equazione (1) è un numero primo, è dunque equivalente alla sua risolubilità per radicali — è però notevole in sè stessa. Perciò mi sono proposto il problema seguente :

Data un'equazione

$$P(x) - t\,Q(x) = 0$$

di grado n qualsiasi, contenente linearmente un parametro, trovare le

(1) Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1924.

(2) Vedi la Memoria di O. Chisini: *Sulla risolubilità per radicali delle equazioni contenenti linearmente un parametro*, inserita nei Rendiconti del Reale Istituto lombardo di scienze e lettere, vol. XLVIII, fasc. 9, an. 1915.

(3) I. F. Ritt, *On algebraïc functions which can be expressed in terms of radicals*, Transactions of the American mathematical Society, vol. 24, july 1922.

condizioni necessarie e sufficienti affinchè tutte le sue radici siano esprimibili razionalmente in funzione di due qualsiansi tra esse.

Nel trattare tale problema si è condotti a imporre certe condizioni ai punti di diramazione dell'equazione proposta, che riguardano, sia il numero di tali punti, sia le loro relative multiplicità. Invece di parlare di punti di diramazione, si può anche parlare di punti multipli della serie lineare g_n^1 sulla retta x definita dalla (1). E allora il risultato fondamentale della mia ricerca si enuncia come segue:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione (1) *goda della proprietà che tutte le sue radici siano esprimibili razionalmente in funzione di due qualsiansi tra esse, è che i gruppi della* g_n^1 *contenenti punti multipli si presentino in uno dei modi seguenti*:

1) due gruppi costituiti ciascuno di un punto n-plo;

2) un gruppo costituito di un punto n-plo e due gruppi costituiti ciascuno di $\frac{n-1}{2}$ punti doppî e di un punto semplice;

3) quattro gruppi costituiti ciascuno di $\frac{n-1}{2}$ punti doppî e di un punto semplice;

4) tre gruppi costituiti ciascuno di $\frac{n-1}{3}$ punti tripli e di un punto semplice;

5) un gruppo costituito di $\frac{n-1}{2}$ punti doppî e di un punto semplice, due gruppi costituiti ciascuno di $\frac{n-1}{4}$ punti 4-pli e di un punto semplice;

6) un gruppo costituito di $\frac{n-1}{2}$ punti doppî e di un punto semplice, un gruppo costituito di $\frac{n-1}{3}$ punti tripli e di un punto semplice, un gruppo costituito di $\frac{n-1}{6}$ punti 6-pli e di un punto semplice;

7) un gruppo costituito di 2 punti $\frac{n}{2}$-pli, due gruppi costituiti ciascuno di $\frac{n}{2}$ punti doppî;

8) $n = 60$; un gruppo costituito di 30 punti doppî, un gruppo costituito di 20 punti tripli, un gruppo costituito di 12 punti 5-pli;

9) $n = 24$; un gruppo costituito di 12 punti doppî, un gruppo costituito di 8 punti tripli, un gruppo costituito di 6 punti 4-pli;

10) $n = 12$; un gruppo costituito di 6 punti doppî, due gruppi costituiti ciascuno di 4 punti tripli;

11) $n = 4$; un gruppo costituito di due punti doppî, due gruppi costituiti ciascuno di un punto triplo e di un punto semplice.

In singoli casi le radici dell'equazione si esprimono anzi razionalmente in funzione di *una* qualunque delle radici: e precisamente questo accade nei casi 1, 7, 8, 9, 10.

Lo studio del gruppo di monodromia in ciascuno dei casi 1–11 mostra *a posteriori* che tale gruppo risulta sempre *risolubile*, eccezione fatta per il caso 8, in cui il gruppo di monodromia è un gruppo semplice di grado 60, isomorfo col gruppo dell'icosaedro. Si è così condotti al teorema seguente:

Affinchè un'equazione $P(x) - t\,Q(x) = 0$, *contenente linearmente un parametro e di grado diverso da 60, sia risolubile per radicali, è sufficiente che tutte le sue radici siano esprimibili razionalmente in funzione di due qualsiansi tra esse.*

Un'altra conseguenza che ho potuto trarre dallo studio del gruppo di monodromia dell'equazione (1) riguarda la sua imprimitività. E precisamente, nei casi 1–7 risulta che, *se il grado dell'equazione contiene un fattore* p^k, *dove* p *è un numero primo e* k *è* > 2, *allora l'equazione è certamente imprimitiva.* D'altra parte è ben noto che, se il grado di un'equazione risolubile per radicali non è una potenza di un numero primo, allora l'equazione è imprimitiva. Ne segue che nei casi suddetti la risoluzione dell'equazione (1) viene a dipendere dalla risoluzione di equazioni risolubili, dello stesso tipo (cioè contenenti linearmente un parametro e soddisfacenti alla condizione che tutte le sue radici siano esprimibili razionalmente ecc.), e di cui il grado è o un numero primo o il quadrato di un numero primo.

La suddetta imprimitività dell'equazione (1) *continua a sussistere anche nel campo razionale dei suoi coefficienti.*

Aggiungerò che *occorrono soltanto operazioni razionali* per riconoscere se un'equazione data del tipo (1) soddisfi o no a una delle condizioni 1–11.