ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE

DEI LINCEI

ANNO CCCXXI

1924

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXXIII.

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL DOTT. PIO BEFANI

1924

Fisica matematica. *Su un'estensione del problema di Lamé riguardante la distribuzione di temperature in un ellissoide a tre assi disuguali.* Nota del dott. BONAPARTE COLOMBO, presentata dal Socio C. SOMIGLIANA [1].

Il Lamé [2] costruisce la funzione F che rappresenta la temperatura stazionaria in un ellissoide solido ed omogeneo, di cui la parete è tenuta a temperature fisse, se pur variabili da un suo punto all'altro, risolvendo per l'ellissoide il classico problema di Dirichlet: costruire una funzione F dei punti dello spazio che soddisfi all'equazione di Laplace $\Delta_2 F = 0$, la quale è appunto anche l'equazione dell'equilibrio del calore, e che sulla parete dell'ellissoide si riduca ad una funzione assegnata. Siccome il Lamé suppone la soluzione F dell'equazione di Laplace sviluppabile in serie di soluzioni semplici, delle cui costanti arbitrarie si vale poi per soddisfare alla condizione ai limiti, la prima questione è la ricerca di tali soluzioni semplici, che siano il prodotto di tre funzioni rispettivamente di una sola delle tre variabili indipendenti del problema. A tal fine conviene introdurre le coordinate u, v, w, che si ottengono dalle coordinate ellittiche λ, μ, ν, relative alle quadriche omofocali di un solito sistema

$$\frac{x_1^2}{p_1 - \tau} + \frac{x_2^2}{p_2 - \tau} + \frac{x_3^2}{p_3 - \tau} - 1 = 0, \tag{1}$$

col porre

$$\begin{cases} 3e_\alpha = p_\beta + p_\gamma - 2p_\alpha & (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3) \\ \wp s = -\tau + \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + p_3) \end{cases} \tag{2}$$

in cui, secondo le notazioni usuali in teoria di funzioni ellittiche [3], la $\wp$ indica la funzione di Weierstrass completamente definita dalle e_α, e col chiamare poi u, v o w la variabile s, secondo che la corrispondente τ è una λ, μ o ν.

[1] Pervenuta all'Accademia il 23 luglio 1924.

[2] Lamé, *Sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux.* Journal de mathématiques pures et appliquées, *4*, 1839.

[3] Cfr. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications,* ed in particolare il capitolo XII del 2° volume *Équation de Lamé.*

Dalle (2) si trae

$$ps - e_\alpha = p_\alpha - \tau \; ; \tag{3}$$

sicchè, essendo

$$\lambda < p_1 < \mu < p_2 < \nu < p_3 \, , \tag{4}$$

risulta

$$pu > e_1 > pv > e_2 > pw > e_3 \, . \tag{5}$$

La funzione ellittica utilizzata è a discriminante positivo; se ω ed ω' ne sono rispettivamente il semiperiodo reale ed imaginario puro, allora, a meno di periodi, u e $w - \omega'$ sono reali, mentre $v - \omega$ è imaginario puro. Affinchè sussista una corrispondenza biunivoca fra le u, v, w e le λ, μ, ν, ed affinchè ogni funzione uniforme di s possa riguardarsi come una funzione uniforme anche di ps, convengo di limitare gli intervalli di variabilità delle coordinate u, v, w per modo che ad un valore fissato per ps corrisponda uno ed un solo valore di s; ciò si ottiene, ad es., lasciando variare u e $w - \omega'$ da 0 ad ω e $v - \omega$ da 0 ad ω'.

L'equazione di Laplace, scritta in coordinate u, v, w, è

$$(pv - pw) \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + (pw - pu) \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} + (pu - pv) \frac{\partial^2 F}{\partial w^2} = 0 \; ; \tag{6}$$

se si tenta di soddisfare ad essa con una funzione $F_1(u)\, F_2(v)\, F_3(w)$, si ottiene, sostituendo e dividendo poi per $F_1\, F_2\, F_3$,

$$(pv - pw) \frac{F_1''}{F_1} + (pw - pu) \frac{F_2''}{F_2} + (pu - pv) \frac{F_3''}{F_3} = 0 \; ; \tag{7}$$

sicchè, posto

$$\frac{F_1''}{F_1} = \varphi_1 \qquad \frac{F_2''}{F_2} = \varphi_2 \qquad \frac{F_3''}{F_3} = \varphi_3 \, , \tag{8}$$

si perviene alla relazione fondamentale

$$(pv - pw)\, \varphi_1(u) + (pw - pu)\, \varphi_2(v) + (pu - pv)\, \varphi_3(w) = 0 \tag{9}$$

che deve sussistere identicamente.

Ora è immediato verificare che la (9) è soddisfatta prendendo

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \Phi \quad \text{e} \quad \Phi(s) = A\, ps + B \, , \tag{10}$$

le A e B essendo due costanti arbitrarie. Ma si dimostra inoltre che la (9) può soddisfarsi soltanto in questo modo, scrivendo in essa $\psi_1(pu)$, $\psi_2(pv)$,

$\psi_3(pw)$ al posto di $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(v)$, $\varphi_3(w)$ e ragionando poi sulle relazioni che si ottengono eguagliando identicamente a zero le tre derivate prime e le sei derivate seconde del suo primo membro rispetto a pu, pv, pw, e che dicono appunto essere ψ_1, ψ_2, ψ_3 i simboli di una stessa funzione lineare.

Si conclude:

« Condizione necessaria e sufficiente affinchè si possa soddisfare alla « equazione (6) colla funzione $F_1(u)\,F_2(v)\,F_3(w)$ è che F_1, F_2, F_3, rispet- « tivamente negli intervalli di variabilità di u, v, w, verifichino l'unica equa- « zione differenziale lineare omogenea del secondo ordine

$$\frac{d^2f}{ds^2}=[A\,ps+B]\,f \tag{11}$$

« con A e B costanti arbitrarie ».

Delle opportune soluzioni f, determinate a meno di un fattore costante, dell'equazione (11), in cui si faccia $A=n(n+1)$ con n numero intero positivo e si eguagli B ad una radice qualunque di un'equazione algebrica di grado $2n+1$, si chiamano funzioni di Lamé, e le funzioni $f(u)\,f(v)\,f(w)$, colle quali si può soddisfare la (6), e che sono simmetriche rispetto ad u, v, w, si chiamano prodotti di Lamé.

Ora mi propongo di studiare più in generale non l'equilibrio, ma la distribuzione di temperature in un ellissoide, nel senso che suppongo la temperatura F non stazionaria, ma funzione anche del tempo t.

Siccome l'equazione alle derivate parziali, corrispondente a questo nuovo problema, non è più quella di Laplace, ma la seguente:

$$\Delta_2 F=\frac{1}{k^2}\frac{\partial F}{\partial t} \qquad (k^2 \text{ costante}) \tag{12}$$

che in coordinate u, v, w si scrive

$$\frac{1}{(pu-pv)(pu-pw)}\frac{\partial^2F}{\partial u^2}+\frac{1}{(pv-pu)(pv-pw)}\frac{\partial^2F}{\partial v^2}+ \tag{13}$$
$$+\frac{1}{(pw-pu)(pw-pv)}\frac{\partial^2F}{\partial w^2}=\frac{1}{k^2}\frac{\partial F}{\partial t}\ (^1),$$

la prima questione che si presenta, volendo ancora seguire il metodo classico dell'integrazione per serie di soluzioni semplici, è la ricerca di siffatte soluzioni semplici della (13), che siano il prodotto di funzioni rispettivamente di una sola delle variabili indipendenti u, v, w, t del problema e

(1) Appare subito incidentalmente che non esiste una soluzione F della (13) la quale sia funzione solo del tempo t e di una coordinata geometrica u, v, w, sicchè non esiste una distribuzione di temperatura tale che, per ogni valore del tempo, questa rimanga costante sugli ellissoidi, oppure sugli iperboloidi ad una o a due falde di un sistema di quadriche omofocali.

contengano delle costanti arbitrarie, la cui determinazione possa poi farsi mediante le condizioni ai limiti, che ora si hanno non solo sulla parete dell'ellissoide, ma anche per $t = 0$.

Se si tenta di soddisfare alla (13) con una funzione $F_1(u)\, F_2(v)\, F_3(w)\, T(t)$, si ottiene, sostituendo e dividendo poi per $F_1\, F_2\, F_3\, T$,

$$(14)\qquad \frac{1}{(pu-pv)(pu-pw)}\frac{F_1''}{F_1}+\frac{1}{(pv-pu)(pv-pw)}\frac{F_2''}{F_2}+$$
$$+\frac{1}{(pw-pu)(pw-pv)}\frac{F_3''}{F_3}=\frac{1}{k^2}\frac{T'}{T}$$

di cui il primo membro è una funzione soltanto di u, v, w, mentre il secondo è una funzione soltanto di t; perchè siano eguali è necessario e sufficiente che entrambi siano eguali ad una costante A (negativa per ragioni fisiche). Si trae subito, al solito, $T = e^{Ak^2t}$, prescindendo da un fattore arbitrario costante; e, facendo poi ancora le posizioni (8), si è condotti alla relazione

$$(15)\qquad (pv-pw)\,\varphi_1(u)+(pw-pu)\,\varphi_2(v)+(pu-pv)\,\varphi_3(w)=$$
$$=A(pu-pv)(pu-pw)(pv-pw)=$$
$$=A\left[(pv-pw)(pu)^2+(pw-pu)(pv)^2+(pu-pv)(pw)^2\right],$$

ossia alla relazione fondamentale

$$(16)\qquad (pv-pw)\left[\varphi_1(u)-A(pu)^2\right]+$$
$$+(pw-pu)\left[\varphi_2(v)-A(pv)^2\right]+(pu-pv)\left[\varphi_3(w)-A(pw)^2\right]=0$$

che deve sussistere identicamente. Segue, valendosi del risultato già stabilito per la (9), che la (16) è soddisfatta prendendo

$$(17)\qquad \varphi_1=\varphi_2=\varphi_3=\Phi \quad \text{e} \quad \Phi(s)=A(ps)^2+B\,ps+C$$

con B e C costanti arbitrarie, e che inoltre può soddisfarsi in questo modo soltanto.

Si conclude:

« Affinchè si possa soddisfare all'equazione generale del calore (13) « con una funzione $F_1(u)\, F_2(v)\, F_3(w)\, T(t)$, è necessario e sufficiente che, « a meno di un fattore, sia $T = e^{Ak^2t}$ con A costante negativa arbitraria, « e che inoltre F_1, F_2, F_3, rispettivamente negli intervalli di variabilità « di u, v, w, soddisfino all'unica equazione differenziale lineare omogenea « del secondo ordine

$$(18)\qquad \frac{d^2f}{ds^2}=\left[A(ps)^2+B\,ps+C\right]f$$

« con B, C costanti arbitrarie ».

La (18) è più generale della (11), come era da attendersi *a priori* in quanto il problema della temperatura non stazionaria è più generale di quello della temperatura stazionaria, e diviene identica alla (11) soltanto quando si faccia essenzialmente $A = 0$. Emerge ancora la possibilità di assumere quali funzioni F_1, F_2, F_3 un'unica soluzione f di (18) da riguardarsi rispettivamente come funzione della u, della v e della w.

La (18) rientra in una classe di equazioni differenziali, per cui è già svolta una teoria generale (¹), in quanto, essendo unitario il coefficiente di $\frac{d^2 f}{ds^2}$, il coefficiente di f, tenuto conto della convenzione fatta sull'intervallo di variabilità di s, non ha altri punti singolari se non un polo del quarto ordine per $s = 0$; ogni suo integrale, quando si prescinda da questo punto $s = 0$, in cui è irregolare, è ovunque olomorfo, ed i coefficienti del corrispondente sviluppo in serie si determinano successivamente con legge ricorrente.

Mi riservo di studiare diffusamente la (18) e di completare poi la risoluzione del problema ora considerato.

Fisica. — *Relazione fra tensione elastica e comportamento magnetico degli acciai al nichel nell'intorno del punto di trasformazione.* Nota di WASHINGTON DEL REGNO, presentata dal Socio M. CANTONE (²).

Le proprietà dei metalli e delle leghe subiscono delle variazioni più o meno notevoli in corrispondenza al passaggio per i punti di trasformazione. Di recente gli studii sulle modalità e sulla natura delle trasformazioni che hanno luogo nelle sostanze allo stato solido, si sono avvantaggiati di tali metodi di analisi che presentano sugli altri il pregio di essere assai sensibili e sicuri.

In particolare è stato sviluppato lo studio del metodo elettrico, variazione della resistenza elettrica e del potere termoelettrico, e dei metodi elastici, variazione del modulo di rigidità e quindi di torsione, del modulo di Young e del decremento logaritmico delle oscillazioni di torsione. Di maggiore sensibilità si è dimostrato (³) il metodo della determinazione delle variazioni della tenacità e più ancora della tensione limite effettiva, cioè del

(¹) Cfr. Picard, *Traité d'analyse*, tome III, chapitre XI: « Généralités sur les points singuliers des équations différentielles linéaires ».

(²) Pervenuta all'Accademia il 21 agosto 1924.

(³) W. Del Regno, *Tenacità del nichel in rapporto al comportamento magnetico*. Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XXXI, serie 5ª, 1° sem., fasc. III; *Comportamento elastico del nichel ad alte temperature*. Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XXXI, serie 5ª. 2° sem., fasc. V e VI.