ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

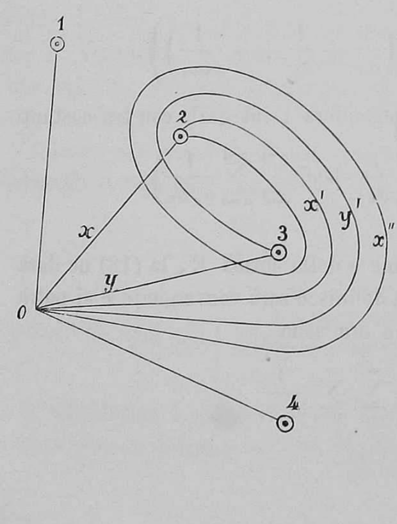
1894

Matematica. — *Sulle superficie di Riemann.* Nota del Corrispondente E. BERTINI.

« Lüroth ha indicato un tipo di superficie riemanniana (Math. Ann., t. 4, p. 181), che Clebsch (ivi, t. 6, p. 216) fece oggetto di studio particolare, notando gli elementi arbitrari che vi figurano e l'utilità delle applicazioni a cui si presta. Picard, nel 2° volume del suo recente *Traité d'Analyse*, introduce la superficie riemanniana sotto quella forma (p. 367 e seg.), ma piuttosto per mezzo di esempi, che per una vera e propria dimostrazione. Le righe seguenti mostrano che si può, senza rinunciare al rigore, accorciare notevolmente la via seguita da Clebsch per giungere alla determinazione del suddetto tipo.

« 1. Una funzione algebrica s della variabile complessa z, definita dalla equazione *irriducibile* $f(sz)=0$, possegga punti di diramazione semplici nei punti $1, 2, 3, 4, \ldots$ del piano della variabile. Precisamente: se $a, b, c, d, \ldots$ sono i valori di s o le *radici* della $f=0$ in un punto fisso O del suddetto piano e se questo punto è congiunto (in qualunque modo) ai detti punti $1, 2, 3, 4, \ldots$ con cappi (Schleifen, lacets) $O1$, $Ox2$, $Oy3$, $O4, \ldots$, che non s'intersecano e che (intorno ad O) si succedono come i punti stessi, avvenga che, percorrendo il 1° cappio, si scambino le radici a, b; percorrendo il 2°, le radici c, d; ecc. Si dirà che ai punti 1, 2, 3, 4, ... sono *coordinate* le coppie $(ab), (cd), (ef), (gh), \ldots$, ovvero che si ha la *coordinazione*

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots \\ (ab) & (cd) & (ef) & (gh) & \ldots\ldots \end{cases}$$



« 2. Occupiamoci delle modificazioni che si possono introdurre nella successione e nella composizione delle coppie col variare la conformazione dei cappî, il che può produrre o no una variazione nella successione dei punti di diramazione.

« Si sostituisca (ad es.) al cappio $Ox2$ il cappio $Ox'2$. Poichè questo nuovo cappio equivale manifestamente ai tre cappî $Oy3$, $Ox2$, $Oy3$, è facile vedere che esso scambia ancora le radici c, d, tanto nel caso che queste radici sieno amendue differenti dalle e, f, quanto nell'altro che sieno amendue eguali alle e, f. Si ottiene cioè in questi due casi la coordinazione

$$(A') \quad \begin{cases} 1 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad \ldots\ldots \\ (ab)\ (ef)\ (cd)\ (gh) \ldots\ldots \end{cases}$$

Invece, se le coppie (cd), (ef) hanno una radice comune $d = e$, colla detta sostituzione, si passa dalla coordinazione

$$(B) \quad \begin{cases} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots\ldots \\ (ab)\ (cd)\ (df)\ (gh) \ldots\ldots \end{cases}$$

alla

$$(B') \quad \begin{cases} 1 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad \ldots\ldots \\ (ab)\ (df)\ (cf)\ (gh) \ldots\ldots \end{cases}$$

Ripetendo in tal caso l'operazione col sostituire ad $O\,y\,3$ il cappio $O\,y'\,3$, si passerà analogamente dalla coordinazione (B') alla

$$(B'') \quad \begin{cases} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots\ldots \\ (ab)\ (cf)\ (cd)\ (gh) \ldots\ldots \end{cases}$$ [1]

[1] Se si ripete nuovamente l'operazione col sostituire ad $O\,x'\,2$ il cappio $O\,x''\,2$ [ossia se si avanza in (B'') la coppia (cd) oltre (cf)] dalla (B'') nascerà la coordinazione:

$$\begin{cases} 1 \quad 3 \quad 2 \quad 4 \quad \ldots\ldots \\ (ab)\ (cd)\ (df)\ (gh) \ldots\ldots, \end{cases}$$

nella quale le coppie sono le stesse e nello stesso ordine della (B), mentre i punti 2, 3 sono scambiati tra loro. Dal confronto di (A), (A') emerge che la stessa proprietà sussiste se (cd), (ef) sono due coppie eguali. Di qui si trae, potendosi collo scambiare successivi punti di diramazione arrivare a qualsiasi disposizione di questi, che se una serie di coppie, coordinata ad una disposizione dei punti di diramazione, è tale che due coppie successive abbiano sempre almeno una radice comune, quella medesima serie si può pensare coordinata a qualunque altra disposizione dei punti di diramazione. Ora si dimostra in seguito (n. 6 o n. 7) che da qualunque coordinazione (A) si può sempre passare ad un'altra avente il detto carattere (cioè che due coppie successive abbiano almeno una radice comune), che indicheremo con

$$(A^*) \quad \begin{cases} s_1 \quad s_2 \quad s_3 \quad s_4 \quad \ldots\ldots \\ (ab)\ (ab)\ (ac)\ (ac) \ldots\ldots, \end{cases}$$

$s_1\,s_2\,s_3\,s_4 \ldots$ essendo una certa disposizione dei punti $1\,2\,3\,4 \ldots$ Sia $\varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3\,\varrho_4 \ldots$ un altra disposizione di questi punti: per ciò che si è detto avanti si potrà adunque avere anche la coordinazione

$$(A_1^*) \quad \begin{cases} \varrho_1 \quad \varrho_2 \quad \varrho_3 \quad \varrho_4 \quad \ldots\ldots \\ (ab)\ (ab)\ (ac)\ (ac) \ldots\ldots, \end{cases}$$

ove l'ordine e la formazione delle coppie sono come in (A*). Si imagini adesso la serie di operazioni con cui da (A) si è passato ad (A*), si considerino queste operazioni in senso inverso e si applichino alla coordinazione (A_1*): ne nascerà una coordinazione

$$(A_1) \quad \begin{cases} r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4 \quad \ldots\ldots \\ (ab)\ (cd)\ (ef)\ (gh) \ldots\ldots \end{cases}$$

in cui le coppie saranno manifestamente come in (A), ma $r_1\,r_2\,r_3\,r_4 \ldots$ sarà una disposizione diversa dalla $1\,2\,3\,4 \ldots$; altrimenti, eseguendo sopra (A_1) le suddette operazioni

« Confrontando (A) con (A′) e (B) con (B′) o (B″), si riconosce che *una coppia* [(ef) o (cd) in (A); (df) o (cd) in (B)] *si può avanzare a sinistra o a destra di un posto e quindi di un numero qualunque di posti, senza che essa si alteri, ma essendone modificate quelle coppie che essa oltrepassa e colle quali ha una radice comune. In ciascuna di tali coppie si sostituisce alla radice comune l'altra radice della coppia mobile.*

« 3. Se si avesse, ad es. la serie di coppie

(1) $$(ab)\,(cd)\,(cd)\,(de)\ldots\ldots,$$

avanzando successivamente le due coppie eguali (cd) oltre (de), si ottiene colla suddetta regola

$$(ab)\,(de)\,(cd)\,(cd)\ldots\ldots$$

Adunque *la successione di un numero pari di coppie eguali può essere collocata dovunque senza che le altre sieno modificate.*

« Se si avanza invece (de) oltre le due coppie eguali (cd), da (1) si passa a

$$(ab)\,(de)\,(ce)\,(ce)\ldots\ldots$$

« 4. Ciò posto, sia una successione qualunque di coppie e (ab) la prima di esse. Vicino a questa potremo porre, col procedimento del n. 2, le altre coppie (ab) della successione, se ne esistono. Dico che *se il numero di queste coppie* (ab) *è dispari, si può sempre ottenere dalle rimanenti un'altra coppia* (ab). Infatti, percorrendo successivamente i cappî corrispondenti a tutte le coppie, o, come diremo brevemente, *percorrendo tutte le coppie*, si deve dalla radice a (ad es.) ritornare alla stessaradice: ma per correndo le coppie (ab), che sono in numero dispari, da a si passa a b: dunque le coppie rimanenti devono ricondurre da b ad a. La prima di queste coppie che contiene b sia (bc) e poniamola (n. 2) immediatamente dopo le suddette coppie (ab). Percorrendo le coppie che risultano ora successive a (bc), si deve andare da c ad a. Sia (cd) la prima coppia che contiene c e questa collochiamo vicino a (bc). Se d non è a, sia (de) la prima coppia che contiene d di quelle che ora seguono (cd) e collochiamo (de) vicino a (cd): e così seguitiamo. L'operazione deve avere un termine, cioè si deve giungere ad una coppia che contiene a. Si avrà allora, vicino alle coppie (ab), un seguito di coppie

$$(bc)\,(cd)\,(de)\ldots(lm)\,(mn)\,(na)\,.$$

---

di nuovo in senso diretto, si dovrebbe giungere ad (A*) e ad (A_1*), cioè $\varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3\,\varrho_4\ldots$ non sarebbe disposizione diversa dalla $s_1\,s_2\,s_3\,s_4\ldots$ Prendendo per $\varrho_1\,\varrho_2\,\varrho_3\,\varrho_4\ldots$ tutte le disposizioni di $1\,2\,3\,4\ldots$ si hanno adunque per $r_1\,r_2\,r_3\,r_4\ldots$ le disposizioni stesse in altro o medesimo ordine) e quindi dalla (A_1) segue, senza alcuna restrizione, che *qualunque successione di coppie, coordinata ad una disposizione dei punti di diramazione, si può rendere coordinata ad ogni altra disposizione di essi* (col solo variare la conformazione dei cappi). Non occorre adunque occuparsi dell'ordinamento dei punti di diramazione, ma solo dell'ordinamento e della formazione delle coppie.

Avanzando successivamente le (mn), (lm), ... (de), (cd), (bc) oltre (na), da questa nasce evidentemente (n. 2) una coppia (ab), come si è affermato.

« 5. Per essere la equazione $f = 0$ irriducibile, da una radice a o b, per opportuna successione di coppie, si deve andare ad ogni altra radice. Segue che, oltre al gruppo di coppie (ab) in numero pari, dianzi considerato, gruppo che indicheremo con G_{ab}, esisterà certamente almeno una coppia contenente a o b. Sia (bc), che porremo di seguito a G_{ab}. Dall'esistenza di (bc), ragionando come nel n. 5 e notando che il percorrere le coppie del gruppo G_{ab} non ha alcuna influenza, si conclude che, o esiste, o si può ottenere dalle rimanenti coppie un'altra coppia (bc), o altre coppie (bc), di seguito a quella da cui siamo partiti e che formino con essa un numero pari di tali coppie. Indichiamo con G_{bc} l'insieme di queste coppie. Si può fare, prima di andare innanzi, una modificazione; avanzare cioè una coppia di G_{ab} oltre tutte le coppie di G_{bc}; questo gruppo diventa G_{ac} (n. 2), che si può mettere al posto di prima (n. 3). La nostra successione comincia quindi coi due gruppi G_{ab} G_{ac}.

« Per la stessa ragione detta sopra, almeno una delle coppie che seguono questi due gruppi deve contenere a o b o c. Ripetendo la precedente dimostrazione, ne nascerà un terzo gruppo, contenente un numero pari di coppie, che sarà del tipo G_{ad} o G_{bd} o G_{cd}. Se è G_{bd} o G_{cd} si può fare una modificazione come quella ultimamente indicata, adoperando una coppia di G_{ab} o di G_{ac} (nel primo caso occorrendo però di collocare G_{ab} dopo G_{ac} (n. 3)); e si ha quindi in ogni caso un gruppo del tipo G_{ad}. La nostra successione comincia adesso coi tre gruppi $G_{ab}\, G_{ac}\, G_{ad}$ e deve nelle coppie rimanenti contenere a o b o c o d; e ne risulta, come precedentemente, in ogni caso un guarto gruppo G_{ae}: e così di seguito. Non è escluso che compaiano gruppi eguali (cioè formati di coppie eguali), che si possono riunire in un gruppo unico (n. 3). Adunque *si può sempre ottenere che la successione delle coppie sia formata di* $n-1$ *gruppi*

$$\text{(G)} \qquad G_{ab}\, G_{ac}\, G_{ad} \,.\,.\,.\,.\,.\, G_{ar}\, G_{as}\, G_{at}\,,$$

ogni gruppo G_{ij} *contenendo un numero pari di coppie* (ij); *essendo* n *il numero delle radici ed* $abcd \ldots rst$ *una loro disposizione.*

« 6. In (G) si avanzi una coppia di G_{as} oltre G_{at}; questo gruppo diventa G_{st} che si può rimettere al suo posto. Così una coppia di G_{ar} si avanzi oltre G_{as}; questo diventa G_{rs} che pure si può rimettere al posto; e così di seguito. Ne risulta che *la successione delle coppie può anche essere formata dai gruppi seguenti*

$$\text{(G')} \qquad G_{ab}\, G_{bc}\, G_{cd} \,.\,.\,.\,.\,.\, G_{rs}\, G_{st}\,.$$

Viceversa da (G') si passa facilmente a (G).

« 7. È importante osservare che, tanto in (G), quanto in (G') (oltre l'arbitrietà sussistente in generale, detta nella nota al n. 2):

1° Per *abcd ... rst si può prendere una disposizione qualunque delle n radici.* Basta mostrare che in (G′), ad es., si può scambiare due radici successive b, c, cioè che si può avere una serie di gruppi

$$G_{ac}\,G_{cb}\,G_{bd}\,.....\,G_{rs}\,G_{st}$$

corrispondente alla disposizione $a\,c\,b\,d \ldots r\,s\,t$. Ciò si ottiene facendo avanzare in (G′) una coppia di G_{bc} oltre G_{ab} e un'altra coppia pure di G_{bc} oltre G_{cd} e poi restituendo al posto i gruppi G_{ac}, G_{bd} che così si ottengono.

2° *Si può variare arbitrariamente il numero delle coppie di ciascun gruppo* (purchè non divenga zero, nè cessi di essere pari): cioè se r è il numero dei punti di diramazione ed $r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$ numeri qualunque interi positivi (non nulli) soddisfacenti alla

$$2r_1 + 2r_2 + \ldots + 2r_{n-1} = r,$$

si può ottenere, ad es. in (G′), che G_{ab} contenga $2r_1$ coppie, G_{bc} $2r_2$ coppie, ecc. Sarà sufficiente dimostrare che di due gruppi successivi G_{ab} G_{bc} si può accrescere uno di due coppie privandone l'altro. Si avanzi una coppia di G_{bc} oltre le due ultime coppie di G_{ab}, e, oltre queste, divenute (ac) (ac), si avanzi la terz'ultima coppia di G_{ab}: quelle due coppie si trasformano in (bc) (bc), cioè G_{ab} è diminuito di due coppie e G_{bc} accresciuto di due.

« 8. Da una serie di gruppi (G′), che sarà coordinata, mediante un sistema di cappî, ai punti di diramazione presi in un certo ordine, si ha immediatamente la superficie riemanniana secondo Lüroth e Clebsch, congiungendo i punti di diramazione in quell'ordine con una linea che lasci tutti i cappî da una stessa parte, e poi tagliando lungo essa n fogli e ricongiungendo questi opportunamente. Si avrà un primo foglio A congiunto ad un secondo B per r_1 linee di passaggio, corrispondenti ad r_1 paia di coppie di G_{ab}; poi il secondo foglio B congiunto ad un terzo C per r_2 linee di passaggio; ecc. Se $r_1 = r_2 = \ldots = r_{n-2} = 1$, si ha il caso particolarmente considerato da Clebsch, nel quale ciascun foglio è congiunto al successivo per una sola linea di passaggio, tranne il penultimo che è congiunto all'ultimo per $p+1$ tali linee, essendo p il genere della superficie.

« Dalla serie (G) si ha parimenti un altro tipo di superficie riemanniana, nel quale un foglio è congiunto per $\frac{r}{2}$ linee di passaggio a tutti gli altri e questi non hanno alcuna congiunzione fra loro ».

Meccanica. — *Attrazione di una piramide retta a base regolare sul centro della base.* Nota del dott. NAZZARENO PIERPAOLI, presentata dal Socio BLASERNA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.