ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

ove q sia un numero primo o composto, ma in ogni caso privo di fattori quadrati. La discussione del § 2 ci prova subito che qui si ha

$$\nu = \lambda, \quad \tau = \mu$$

essendo λ, μ privi fra loro e, poichè

$$\sqrt{q\lambda\mu}$$

deve essere intero, avremo

$$q = \lambda\mu.$$

« Viceversa, essendo

$$q = q' q''$$

una qualunque decomposizione di q in due fattori, potremo fare

$$\lambda = \nu = q' \;, \; \mu = \tau = q'' .$$

« Il gruppo H da considerarsi è in questo caso composto delle sostituzioni di 1ª e 2ª specie, a determinante $+1$, della forma

$$\begin{pmatrix} a\sqrt{\lambda} + b\sqrt{\frac{q}{\lambda}} \;, & c\sqrt{\lambda} + d\sqrt{\frac{q}{\lambda}} \\ -c\sqrt{\bar{\lambda}} + d\sqrt{\frac{q}{\lambda}} \;, & a\sqrt{\bar{\lambda}} - b\sqrt{\frac{q}{\lambda}} \end{pmatrix},$$

dove a, b, c, d sono interi complessi di Gauss e λ percorre tutti i divisori di q. Se q è il prodotto di n fattori primi, abbiamo così 2^n tipi di sostituzioni, sulle quali si verificherà subito la proprietà di formare gruppo.

« La ristrettezza dello spazio non mi consente qui di fare seguire la definizione dei nuovi gruppi da esempî effettivi di determinazione dei loro poliedri fondamentali. Il lettore potrà a tale oggetto consultare la mia Memoria negli Annali di Matematica ».

Matematica. — *Sulle equazioni alle differenze.* Nota del Corrispondente S. Pincherle.

« La presente Nota ha origine da uno studio suggeritomi da benevoli comunicazioni epistolari del ch. prof. Hermite. Nelle sue ricerche sulla generalizzazione dell'algoritmo delle frazioni continue, si sono presentate all'insigne analista delle equazioni alle differenze del secondo ordine, i cui coefficienti contengono linearmente un parametro x, e di cui un integrale è costituito da un sistema di polinomî in x di grado costante. Ciò mi ha condotto a cercare le condizioni affinchè una equazione data alle differenze dell'ordine r, ammetta s integrali ($s < r$) di grado costante in x e più particolarmente indipendenti da x.

« In tale ricerca mi si è presentato così spontaneo e luminoso il concetto di divisione e divisibilità delle espressioni lineari alle differenze da essere condotto a ritenerlo come di grande e naturale sussidio per la risoluzione della questione di sopra enunciata e di molte altre analoghe; dando nelle righe seguenti alcune proposizioni fondamentali ispirate a tale concetto, credo di non fare cosa inutile per la teoria interessante e forse troppo ingiustamente negletta delle equazioni alle differenze. Il riavvicinamento che ne risulta fra le equazioni alle differenze e le ordinarie equazioni algebriche, appunto per la sua spontaneità, sarà forse già stato notato altre volte; a questo proposito il ch. prof. Beltrami ha gentilmente richiamata la mia attenzione sul § 492 del T. II delle *Lezioni di calcolo sublime* del Bordoni, dove è resa manifesta l'analogia fra l'equazione alle differenze

$$y_n\, y_{n+1} - a_n\, y_{n+1} - b_n\, y_n + c_n = 0$$

e l'ordinaria equazione di secondo grado. Però, per quanto io sappia, non sono state date proposizioni generali su tale argomento, meno che per il caso assai ovvio delle equazioni lineari a coefficienti costanti (¹). Il metodo simbolico applicato dal Boole (²) alle equazioni differenziali lineari ha, colle notazioni usate in ciò che segue, una somiglianza di sola apparenza.

« 1. Si dirà *forma lineare alle differenze*, o semplicemente *forma*, ogni espressione

$$\text{(1)} \qquad F(f) = f_{n+r} + a_{1.n}\, f_{n+r-1} + \cdots + a_{r-1.n}\, f_{n+1} + a_{r.n}\, f_n;$$

f_n è una funzione indeterminata dell'indice; r è *l'ordine* della forma. La F è una operazione funzionale distributiva.

« Date due forme $F(f)$, $G(f)$, ponendo G in luogo di f nella prima si avrà una nuova forma, di ordine uguale alla somma degli ordini di F e G e che si dirà *prodotto* delle forme F, G: essa verrà indicata con $FG(f)$. Così si definirà il prodotto di tre o più forme: avendosi con ciò una specie di moltiplicazione per cui vale la legge associativa, ma non la commutativa.

« 2. Date due forme F, G, la prima di ordine r, la seconda di ordine s, e supponendo $r > s$, si può sempre trovare una forma H dell'ordine $r - s$ e tale che

$$\text{(2)} \qquad F - HG = R,$$

essendo R una forma di ordine inferiore ad s. Infatti, indicando con $h_{1.n}$, $h_{2.n}, \ldots h_{r-s.n}$ i coefficienti di $f_{n+r-s-1}$, $f_{n+r-s-2}, \ldots f_n$ in H, si potranno determinare le $h_{i.n}$ in modo da annullare in $F - HG$ i termini in $f_{n+r}, f_{n+r-1}, \ldots f_{n+s}$: si avranno all'uopo equazioni lineari a determinante certamente diverso da zero, e rimane una forma R (resto) di ordine al più uguale ad $s - 1$.

« 3. Qualora accada che $R = 0$, il che porta ad s relazioni fra i coefficienti di G e di F, si dirà che la forma F è *divisibile* per G, o che G è *divisore* di F; si dirà pure che H è il *quoziente* di F per G.

(¹) V. p. es. Casorati, *Il calcolo alle differenze finite interpretato* ecc. (Ann. di Mat., serie 2ª, t. II, 1880, § 6).

(²) Treatise on differential Equations, 2ª ed., 1865, pag. 381.

« 4. Posto $F = 0$, si ha un' equazione lineare alle differenze dell'ordine r, di cui ogni soluzione è detta un *integrale* di F; più integrali si dicono indipendenti quando fra di essi non passa una relazione lineare omogenea a coefficienti sia indipendenti da n, sia periodici e ad un sol valore in n col periodo 1; r integrali indipendenti formano un sistema fondamentale.

« Se F è divisibile per G, ogni integrale di G è integrale anche di F; un sistema fondamentale di G dà un sistema di s integrali indipendenti di F. Inoltre, sia μ_n un integrale del quoziente H di F per G; si ponga l'equazione

$$G = \mu_n ,$$

lineare (non omogenea) alle differenze d'ordine s; questa avrà un integrale linearmente indipendente dagli s integrali ottenuti per G, e che soddisfarà ad $HG = F = 0$. Con questo metodo si possono ottenere $r - s$ integrali di F indipendenti fra loro e coi precedenti s, in guisa da avere un sistema fondamentale di F.

« 5. Si eseguisca la divisione di F per una forma di prim' ordine

$$E = f_{n+1} - \lambda_n f_n .$$

« Essendo

$$F = GE + R, \quad G = f_{n+r-1} + b_{1.n} f_{n+r-2} + \cdots + b_{r-1.n} f_n ,$$

si avrà per la determinazione delle $b_{i.n}$ un semplice sistema di equazioni lineari, dalle quali per sostituzione successiva si ottiene:

$$\begin{aligned}
b_{1.n} &= \lambda_{n+r-1} + a_{1.n} \\
b_{2.n} &= \lambda_{n+r-1} \lambda_{n+r-2} + a_{1.n} \lambda_{n+r-2} + a_{2.n} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
b_{r-1.n} &= \lambda_{n+r-1} \lambda_{n+r-2} \ldots \lambda_{n+1} + a_{1.n} \lambda_{n+r-2} \ldots \lambda_{n+1} + \cdots + a_{r-2.n} \lambda_{n+1} + a_{r-1.n} \\
R &= (\lambda_{n+r-1} \lambda_{n+r-2} \ldots \lambda_n + a_{1.n} \lambda_{n+r-2} \ldots \lambda_n + \cdots + a_{r-1.n} \lambda_n + a_{r.n}) f_n .
\end{aligned}$$

« È appena necessario di rilevare la perfetta analogia della regola che discende da queste formole per la determinazione del quoziente G, colla nota regola del Ruffini che vale per la formazione del quoziente e del resto nella divisione di un polinomio razionale intero in x per un binomio $x - a$.

« 6. La condizione affinchè F sia divisibile per E viene data da $R = 0$, cioè da

(3) $$\lambda_{n+r-1} \lambda_{n+r-2} \ldots \lambda_n + a_{1.n} \lambda_{n+r-2} \ldots \lambda_n + \cdots + a_{r-1.n} \lambda_n + a_{r.n} = 0 ;$$

ora, posto

(4) $$\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1} = \alpha_n ,$$

la (3) viene soddisfatta se e soltanto se α_n è un integrale di F. Ma dalla (4) segue

$$\alpha_{n+1} - \lambda_n \alpha_n = 0 ,$$

e quindi si ha il teorema:

« Condizione necessaria e sufficiente affinchè una forma F sia divisibile per una forma di prim'ordine, è che l'integrale di questa sia un integrale della F.

« 7. Da quanto precede risulta facilmente la scomposizione di una forma F, di cui si conosca un sistema fondamentale d'integrali $\alpha^{(1)}{}_n$, $\alpha^{(2)}{}_n, \ldots \alpha^{(r)}{}_n$, sotto forma di prodotto di forme di prim'ordine. Preso infatti

$$E^{(1)} = f_{n+1} - \lambda_n{}^{(1)} f_n\,, \quad \lambda_n{}^{(1)} = \frac{\alpha^{(1)}_{(n+1)}}{\alpha^{(1)}_n}\,,$$

si avrà

$$F = G^{(1)}\, E^{(1)},$$

e saranno integrali di $G^{(1)}$ le $E^{(1)}(\alpha_n{}^{(2)})$, $E^{(1)}(\alpha_n{}^{(3)}), \ldots E^{(1)}(\alpha_n{}^{(r)})$. Mediante uno di questi integrali, e posto

$$E^{(2)} = f_{n+1} - \lambda_n{}^{(2)} f_n\,,$$

si può scrivere $G^{(1)}$ sotto la forma $G^{(2)}\, E^{(2)}$, onde

$$F = G^{(2)}\, E^{(2)}\, E^{(1)}$$

e così continuando, si ottiene la scomposizione cercata:

$$F = E^{(r)}\, E^{(r-1)} \ldots E^{(2)}\, E^{(1)}. \tag{5}$$

« È chiaro che varierà la scomposizione al variare della successione degli integrali $\alpha_n{}^{(1)}$, $\alpha_n{}^{(2)}, \ldots \alpha_n{}^{(r)}$, adoperati.

« 8. Inversamente, se una F è data sotto forma di prodotto di forme di prim'ordine, come la (5), è facile di ottenere un sistema fondamentale d'integrali. Si ponga all'uopo

$$E^{(r-1)}\, E^{(r-2)} \ldots E^{(1)} = H^{(1)}, \text{ onde } F = E^{(r)}\, H^{(1)},$$

e si supponga determinato un sistema fondamentale di $H^{(1)}$. Esso ci darà $r - 1$ integrali indipendenti di F: ora, dico che un r^{simo} integrale indipendente dai precedenti, si può avere mediante integrazione di sole equazioni del primo ordine. Infatti un integrale di F che non lo sia di $H^{(1)}$ dovrà dare $E^{(r)}\, H^{(1)} = 0$, cioè $H^{(1)}$ dovrà essere l'integrale $\theta^{(1)}{}_n$ di $E^{(r)} = 0$, facile a determinarsi. Ma si faccia

$$H^{(1)} = E^{(r-1)}\, H^{(2)} \text{ e si ponga l'equazione } E^{(r-1)} = \theta_n{}^{(1)}\,;$$

trovando l'integrale $\theta^{(2)}{}_n$ di questa equazione del prim'ordine, si ponga la nuova equazione $H^{(2)} = \theta^2{}_n$, indi $H^{(2)} = E^{(r-2)}\, H^{(3)}$ e così via: mediante la risoluzione di sole equazioni di prim'ordine, si giunge ad un integrale di F che non è integrale di $H^{(1)}$ e che perciò, insieme a questi, dà un sistema fondamentale di F.

« 9. Scomponendo una forma F nel modo indicato dalla (5), ed essendo

$$E^{(h)} = f_{n+1} - \lambda_n{}^{(h)} f_n\,,$$

si trovano fra i coefficienti $a_{1.n}$, $a_{2.n}, \ldots a_{r.n}$ della F e le quantità $\lambda_n{}^{(h)}$ delle relazioni notevoli, in corrispondenza perfetta colle volgari relazioni fra i coefficenti e le radici di un'equazione algebrica. Sembra superfluo di scrivere qui per disteso queste relazioni, che il lettore scorgerà senza fatica e che supposte vere per una forma d'ordine $r-1$, si desumono immediatamente per la forma di ordine r; basterà notare le più semplici:

$$a_{1.n} = -\left(\lambda^{(1)}_{n+r-1} + \lambda^{(2)}_{n+r-2} + \ldots \lambda^{(r)}_{n}\right) \tag{6}$$

ed

$$a_{r.n} = (-1)^n \lambda_n{}^{(1)} \lambda_n{}^{(2)} \ldots \lambda_n{}^{(r)}. \tag{7}$$

« 10. La formola (7) ci conduce ad un'altra relazione notevole. Se $\alpha^{(1)}{}_n, \alpha^{(2)}{}_n, \ldots \alpha^{(r)}{}_n$ è un sistema fondamentale di F, si può scrivere:

$$\mathrm{F} = \begin{vmatrix} f_n & f_{n+1} & \ldots & f_{n+r} \\ \alpha^{(1)}_n & \alpha^{(1)}_{n+1} & \ldots & \alpha^{(1)}_{n+r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha^{(r)}_n & \alpha^{(r)}_{n+1} & \ldots & \alpha^{(r)}_{n+r} \end{vmatrix};$$

ne risulta che si avrà, usando le parentesi ad indicare i determinanti:

$$a_{r.n} = (-1)^r \frac{(\alpha^{(1)}_{n+1}\, \alpha^{(2)}_{n+2} \ldots \alpha^{(r)}_{n+r}\ )}{(\alpha^{(1)}_{n}\ \ \alpha^{(2)}_{n+1} \ldots \alpha^{(r)}_{n+r-1})},$$

onde

$$\lambda_n{}^{(1)} \lambda_n{}^{(2)} \ldots \lambda_n{}^{(r)} = \frac{(\alpha^{(1)}_{n+1}\, \alpha^{(2)}_{n+2} \ldots \alpha^{(r)}_{n+r}\ )}{(\alpha^{(1)}_{n}\ \ \alpha^{(2)}_{n+1} \ldots \alpha^{(r)}_{n+r-1})}. \tag{8}$$

« Applicando questa stessa formola al prodotto $\mathrm{E}^{(h)}\, \mathrm{E}^{(h-1)} \ldots \mathrm{E}^{(1)}$, $h \leq r$, si avrà

$$\lambda_n{}^{(1)} \lambda_n{}^{(2)} \ldots \lambda_n{}^{(h)} = \frac{(\alpha^{(1)}_{n+1}\, \alpha^{(2)}_{n+2} \ldots \alpha^{(h)}_{n+h}\ )}{(\alpha^{(1)}_{n}\ \ \alpha^{(2)}_{n+1} \ldots \alpha^{(h)}_{n+h-1})},\ (h = 1, 2, 3, \ldots r), \tag{9}$$

che permette di ottenere le successive $\lambda^{(h)}{}_n$ in funzione delle α_n e quindi di determinare i divisori di una forma, dati i suoi integrali (§ 7) e che mostra inoltre come si troverebbero per le λ stesse valori illusorî qualora non si adoperassero, per la formazione delle E, integrali indipendenti.

« Se $\frac{\mathrm{P}_n}{\mathrm{Q}_n}$, $\frac{\mathrm{P}_{n+1}}{\mathrm{Q}_{n+1}}$ sono le ridotte di una frazione continua ordinaria, la nota relazione $\mathrm{P}_n\, \mathrm{Q}_{n+1} - \mathrm{Q}_n\, \mathrm{P}_{n+1} = \pm 1$, nonchè le estensioni che se ne possono dare nella generalizzazione delle frazioni continue [1], sono contenute nelle formole (7) ed (8), come sarebbe facile a dimostrare.

« 11. Definita per le forme lineari alle differenze la divisione, si presenta ovvio il teorema che ogni integrale e quindi ogni divisore di prim'ordine del dividendo e del divisore appartiene anche al resto, e ogni integrale o divisore di prim'ordine del divisore e del resto appartiene anche al dividendo. Onde un algoritmo identico a quello del massimo comun divisore algebrico per

[1] V. il mio *Saggio di una generalizzazione delle frazioni continue*, § 17. Mem. della R. Accad. di Bologna, s. 4ª, t. X, 1890.

riconoscere se due forme hanno integrali comuni e, nel caso affermativo, per ottenerli come integrali di una forma d'ordine inferiore.

« 12. Supponiamo ora che i coefficienti della forma sieno polinomî razionali interi rispetto ad un parametro x: per tali forme potremo definire il concetto di irriducibilità, chiamando *irriducibili* quelle forme che non ammettono divisori aventi coefficienti razionali in x.

« Riserbandomi di tornare in altra occasione su questo concetto onde mostrarne le applicazioni, basti per ora di indicare come le considerazioni che precedono permettano di dare le condizioni affinchè una forma a coefficienti lineari in x abbia un certo numero di integrali, fra loro indipendenti, che non contengano la x. Se la forma

$$f_{n+r}+(a_{1.n}\,x+a'_{1.n})\,f_{n+r-1}+\cdots+(a_{r.n}\,x+a'_{r.n})\,f_n$$

deve avere integrali indipendenti da x, per questi saranno nulle le forme

$$f_{n+r}+a'_{1.n}f_{n+r-1}+\dots a'_{r.n}f_n \quad \text{ed} \quad a_{1.n}f_{n+r-2}+a_{2.n}f_{n+r-2}+\cdots+a_{1.n}f_n,$$

e quindi col metodo del § 11 applicato a queste due forme si avranno le condizioni affinchè vi siano s integrali indipendenti comuni, e la forma di ordine s che ammette questi integrali come sistema fondamentale.

« In particolare, l'equazione di second'ordine

$$f_{n+2}=(a_n\,x+a'_n)\,f_{n+1}+x\,f_n$$

ha un integrale indipendente da x sotto la condizione

$$a_n\,a'_{n-1}+1=0 \tag{10}$$

e l'integrale stesso è

$$\alpha_n=\frac{(-1)^n c}{a_0\,a_1\dots a_{n-1}}\,.$$

« Sotto la condizione (10), la frazione continua

$$\sigma=\cfrac{x}{a_0\,x+a'_0+\cfrac{x}{a_1\,x+a'_1+\cfrac{x}{a_2\,x+a'_2+\cdots}}}$$

può avere un valore indipendente da x: indicando infatti con P_n, Q_n i numeratori e denominatori delle ridotte, sarà

$$\alpha_n=\alpha_0\,P_n+\alpha_1\,Q_n\,;$$

se ora si ha, per valori convenienti di x, $\lim\limits_{n=\infty}\dfrac{\alpha_n}{Q_n}=0$, viene

$$\sigma=\lim_{n=\infty}\frac{P_n}{Q_n}=-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}=\frac{1}{a_0}\text{ ».}$$