ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Seduta del 18 febbraio 1894.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Applicazioni geometriche del metodo delle approssimazioni successive di Picard.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

1.

« Le recenti ed importanti ricerche del sig. Picard sulle equazioni a derivate parziali e sulla loro integrazione per approssimazioni successive danno il modo di dimostrare rigorosamente il teorema della teoria delle superficie pseudosferiche, già formulato da Lie [1] e da Bäcklund [2], che, per individuare una tale superficie, si possono dare ad arbitrio due sue linee assintotiche di sistema diverso.

« Se poniamo, per semplicità, la curvatura K della superficie eguale a -1 e ricordiamo che le assintotiche dell'un sistema hanno tutte la torsione $+1$ e quelle dell'altro sistema la torsione -1 [3], il teorema si enuncia precisamente così:

« A) Date due curve C, C′, la prima a torsione $+1$, la seconda a torsione -1, che escono da un medesimo punto P dello spazio, avendovi lo stesso piano osculatore ma tangenti distinte, esiste una superficie pseudosferica S di raggio $=1$, che le contiene come curve assintotiche.

(1) *Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung* II. Archiv for Mathematatik (Christiania, 1879).

(2) *Om ytor med konstant negativ krökning.* Lund's Univ. Arrskrift, T XIX, 1883.

(3) V. le mie: *Lezioni di geometria differenziale* (Pisa-Spörri, 1894) pag. 125.

« Se di più imponiamo alle curve C, C′ ed alla superficie S la condizione di essere analitiche, possiamo accertare che sussiste la proprietà :

« B) Le due assintotiche C, C′ della superficie pseudosferica S la individuano completamente.

« L'elemento lineare della superficie pseudosferica S, riferita alle sue linee assintotiche u, v, ove per parametri u, v si prendano gli archi delle due assintotiche $v=0$, $u=0$ contati dal punto comune $(0, 0)$, prende la nota forma

$$ds^2 = du^2 + 2 \cos \omega \, du \, dv + dv^2, \tag{1}$$

essendo ω una soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u \, \partial v} = \operatorname{sen} \omega \, ; \tag{2}$$

viceversa ad ogni soluzione ω di questa equazione corrisponde una superficie pseudosferica coll'elemento lineare (1), determinata a meno di movimenti nello spazio. Ora le prime curvature $\frac{1}{\varrho_u}$, $\frac{1}{\varrho_v}$ delle linee assintotiche $u = \text{cost}^{\text{te}}$, $v = \text{cost}^{\text{te}}$ sono date rispettivamente da

$$\frac{1}{\varrho_u} = \frac{\partial \omega}{\partial v}, \quad \frac{1}{\varrho_v} = \frac{\partial \omega}{\partial u},$$

per cui, assegnata la forma delle assintotiche $u=0$, $v=0$, conosciamo $\left(\frac{\partial \omega}{\partial v}\right)_{u=0}$ in funzione di v e $\left(\frac{\partial \omega}{\partial u}\right)_{v=0}$ in funzione di u. Poichè inoltre è noto il valore iniziale ω_0 di ω in $(0, 0)$, conosciamo ω lungo la $u = 0$ e lungo la $v = 0$.

2.

« Per le considerazioni superiori, il teorema A) equivale al seguente :

« L'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = \operatorname{sen} z \tag{3}$$

ammette una soluzione z, che per $y = 0$ si riduce ad una funzione arbitraria $\varphi(x)$ della x, e per $x = 0$ ad una funzione arbitraria $\psi(y)$ della y.

« Supponiamo dapprima soltanto che le funzioni assegnate $\varphi(x)$, $\psi(y)$ siano finite e continue insieme colle derivate prime $\varphi'(x)$, $\psi'(y)$ ed inoltre che si abbia, come è naturale

$$\varphi(0) = \psi(0).$$

« Riguardando x, y come coordinate cartesiane ortogonali in un piano, ci limiteremo a costruire la soluzione cercata entro un rettangolo di area $\lambda < 1$, di cui due lati siano gli assi coordinati $x = 0$, $y = 0$. Basta per ciò applicare il processo generale, ideato da Picard [1], che nel caso nostro prende una forma ben semplice.

« Cominciamo dal costruire la funzione z_1, che soddisfa alla equazione

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\, \partial y} = 0$$

ed alle condizioni iniziali, prendiamo cioè

$$z_1 = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0).$$

« Indi costruiamo la funzione z_2, che soddisfa alle medesime condizioni iniziali ed alla equazione

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\, \partial y} = \operatorname{sen} z_1\,;$$

avremo

$$z_2 = z_1 + \int_0^x \int_0^y \operatorname{sen} z_1\, dx\, dy.$$

« Poi costruiamo la nuova funzione

$$z_3 = z_1 + \int_0^x \int_0^y \operatorname{sen} z_2\, dx\, dy,$$

che soddisfa alle condizioni iniziali ed alla equazione

$$\frac{\partial^2 z_3}{\partial x\, \partial y} = \operatorname{sen} z_2\,.$$

« Così continuiamo indefinitamente, costruendo la serie infinita di funzioni

$$(a) \qquad z_1\,,\ z_2\,,\ z_3 \,\ldots\ldots\, z_n\,, \ldots$$

ove sarà in generale

$$z_n = z_1 + \int_0^x \int_0^y \operatorname{sen} z_{n-1}\, dx\, dy.$$

« Il termine generale z_n della serie (a) soddisfa alle condizioni iniziali, cioè per $y = 0$ si riduce a $\varphi(x)$ e per $x = 0$ a $\psi(y)$ e si ha inoltre

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 z_n}{\partial x\, \partial y} = \operatorname{sen} z_{n-1}\,.$$

« Diciamo ora che: La serie

$$(5) \qquad z = z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \cdots + (z_n - z_{n-1}) + \cdots$$

converge in egual grado entro il rettangolo fissato e rappresenta la soluzione cercata della (3).

(1) Cf. specialmente, *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives.* Chap. II, pag. 22 ss. (Journal de Mathém. 1893).

« Essendo

$$|\operatorname{sen} z_1| < 1,$$

si ha in tutto il rettangolo

$$(6) \qquad |z_2 - z_1| < xy < \lambda.$$

« Ora

$$z_3 - z_2 = \int_0^x \int_0^y 2 \operatorname{sen}\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right) \cos\left(\frac{z_2 + z_1}{2}\right) dx\, dy\,;$$

ma per la (6)

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right)\right| < \left|\frac{z_2 - z_1}{2}\right| < \frac{\lambda}{2},$$

onde

$$|z_3 - z_2| < \lambda . xy < \lambda^2.$$

« Così procedendo, si trova chiaramente che in tutto il rettangolo è

$$|z_n - z_{n-1}| < \lambda^{n-1}.$$

« Paragonando la serie (5) colla progressione geometrica, convergente a causa di $\lambda < 1$

$$\lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \cdots$$

risulta evidente la convergenza in egual grado della (5). La somma dei primi n termini della serie (5) essendo z_n, possiamo anche dire che z_n, al crescere infinito di n, converge in egual grado verso z. Resta a provare che questa funzione z, la quale è certamente finita e continua in tutto il rettangolo e soddisfa alle condizioni iniziali, è una soluzione della (3). Ora ciascun termine della (5) ammette la derivata seconda rapporto ad x e y; per la (4) la serie formata con queste derivate seconde è

$$(7) \qquad \operatorname{sen} z_1 + (\operatorname{sen} z_2 - \operatorname{sen} z_1) + (\operatorname{sen} z_3 - \operatorname{sen} z_2) + \cdots + (\operatorname{sen} z_n - \operatorname{sen} z_{n-1}) + \cdots$$

« La somma dei primi n termini di questa serie è $\operatorname{sen} z_n$ e, al crescere di n, converge *in egual grado* verso $\operatorname{sen} z$, come z_n verso z. Pei teoremi generali sulle serie convergenti in egual grado, la funzione z, rappresentata dalla (5), ammette la derivata seconda $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ che è la serie (7); dunque

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \operatorname{sen} z.$$

« Si osserverà che la regione del piano xy, nella quale è accertata la convergenza della serie (5), è il settore infinito racchiuso fra la iperbola equilatera

$$xy = 1$$

e i due assintoti.

3.

« Supponiamo ora che $\varphi(x)$, $\psi(y)$ siano funzioni *analitiche* di x, y, sviluppabili in serie di Taylor per le potenze di x, y rispettivamente.

« Pei teoremi di Weierstrass anche sen z_1 sarà sviluppabile in serie di potenze di x, y e però anche z_2; lo stesso dicasi di $z_3, z_4, \ldots z_n \ldots$. La serie (5), che rappresenta la nostra soluzione z, essendo convergente in egual grado, potrà essa stessa trasformarsi in una serie di potenze

$$z = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} a_{m,n}\, x^m\, y^n, \tag{8}$$

quindi la soluzione z della (3), fornita dal metodo di Picard, è anch'essa una funzione analitica. D'altronde si vede subito che i coefficienti della serie (8) sono già pienamente determinati dalle condizioni iniziali imposte a z.

« Dunque: Se le funzioni $\varphi(x)$, $\psi(y)$ sono funzioni analitiche, vi ha una ed una sola soluzione analitica della (3), che soddisfa alle condizioni iniziali.

« Così è dimostrato anche il teorema B) n. 1. È importante osservare che nel metodo esposto non si esclude il caso che una delle due funzioni $\varphi(x)$, $\psi(y)$, od anche tutte e due, si riducano ad una costante. Per quanto si è detto al n. 1, ciò significa geometricamente che una delle due assintotiche assegnate od anche ambedue possono essere linee rette.

« L'ultimo caso è specialmente interessante. Vediamo così che: Date due rette che si tagliano, vi ha una ed una sola superficie pseudosferica (analitica) di raggio assegnato, che le contiene ambedue.

« Le superficie pseudosferiche, così caratterizzate dal contenere due rette, non dipendono più che da una costante arbitraria, l'angolo delle due rette. Si vedrà poi subito che nel caso ora considerato le successive funzioni

$$z_2\,,\ z_3\,, \ldots z_n \ldots$$

sono funzioni del prodotto xy soltanto; lo stesso avviene quindi della corrispondente soluzione z della (3). Ne segue che una qualunque di queste superficie pseudosferiche, trasformata con trasformazione di Lie, dà sempre la superficie stessa.

4.

« Delle molte applicazioni che consente il teorema generale, così rigorosamente dimostrato, mi limiterò a citarne qui alcune relative alla teoria dell'applicabilità.

« È noto che la teoria generale della deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili insegna che si può deformare una superficie a curvature opposte, mantenendo rigida una sua linea assintotica. Tale proprietà risulta da ciò che gli sviluppi in serie, che si ottengono allora per la soluzione del problema della deformazione, contengono *infiniti* coefficienti indeterminati (1).

« Però, mancando la dimostrazione generale della convergenza di siffatti sviluppi, gli esempî effettivi delle deformazioni di questa specie presentano sempre un particolare interesse. Qui tratterò appunto delle deformazioni citate per le superficie pseudosferiche stesse e per le loro evolute, che insieme alle superficie rigate luogo delle binormali delle curve a torsione costante costituiscono, come si sa, la classe completa delle superficie applicabili sul catenoide (2).

« Sulla superficie pseudosferica S individuata dalle due assintotiche C, C′, consideriamo un sistema di linee geodetiche parallele uscenti dai punti dell'assintotica C, la cui equazione è $v=0$. Se con θ indichiamo l'angolo d'inclinazione di queste geodetiche sulla $v=0$, avremo lungo C la formola

$$\frac{d(\omega-\theta)}{du}=\operatorname{sen}\theta. \tag{9}$$

« Viceversa se θ soddisfa a questa equazione, le geodetiche spiccate dai punti della $v=0$ nella direzione assegnata da θ formano un sistema di geodetiche parallele.

« Ciò premesso, occupiamoci di caratterizzare le deformazioni della S, per le quali l'assintotica C rimane rigida. Facciamo per ciò variare ad arbitrio la C′, restando fissa C. Allora $\frac{d\omega}{du}$, come rappresentante la flessione di C, non muta e in conseguenza alla (9) si soddisfa sempre col medesimo valore di θ. Se consideriamo dunque due diverse configurazioni S, S′ della superficie pseudosferica, la stessa funzione θ definirà per l'una e per l'altra superficie un sistema di geodetiche parallele. Ora possiamo applicare la S sulla S′ in guisa da sovrapporre i due sistemi di geodetiche parallele considerati e il punto P a sè stesso, dopo di che l'assintotica $v=0$ si sovrapporrà pure a sè stessa.

« Dunque: Le deformazioni di una superficie pseudosferica S, per le quali resta rigida una assintotica C si ottengono semplicemente quando delle due assintotiche C, C′, che individuano la superficie, si tenga fissa la C e si faccia variare di forma arbitrariamente la seconda C′.

(1) Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. T. III, pag. 280, e Weingarten, Crelle's, Journal Band 100, pag. 308.

(2) Un altro esempio istruttivo è stato recentemente trattato dal dott. Calò nella sua tesi di laurea, di cui un estratto trovasi inserito negli Annali di matematica (1893).

« Conformemente alla teoria generale, vediamo che queste deformazioni dipendono da una funzione arbitraria, la flessione di C'.

« Se assoggettiamo C' ad incontrare C sempre sotto il medesimo angolo ω_0, non solo $\frac{d\omega}{du}$ ma ben anche ω stesso non muterà di valore lungo C, e siccome da ω soltanto dipendono i raggi principali di curvatura della superficie, abbiamo il risultato: *Una superficie pseudosferica S ammette infinite deformazioni (dipendenti ancora da una funzione arbitraria) nelle quali un'assintotica C resta rigida e lungo C non variano i raggi principali di curvatura.*

« Ora osserviamo che, tracciata sulla superficie pseudosferica S una curva qualsiasi Γ, che tagli in un punto P l'assintotica C, fra le deformazioni di S in cui C resta rigida ve ne ha una che rende Γ linea assintotica. La nuova forma Γ', che Γ assume dopo la deformazione, è determinata da che la prima curvatura di Γ' eguaglia la curvatura geodetica di Γ e la torsione è $= -1$. Notevole è il caso in cui Γ sia un circolo geodetico; allora dopo la deformazione diventa un'elica circolare. In particolare se Γ è geodetica, dopo la deformazione si rettifica.

« Da ciò che si è detto fin qui è facile concludere: *Tracciate ad arbitrio sulla superficie pseudosferica due curve uscenti da un punto, si può deformare la superficie in guisa da renderle ambedue linee assintotiche.*

5.

« Per ciascuna delle infinite forme, che assume una superficie pseudosferica S flettendosi attorno all'assintotica rigida C e serbando invariati lungo C i raggi principali di curvatura, consideriamo l'una o l'altra falda Σ dell'evoluta. La Σ è applicabile sul catenoide e le sue assintotiche corrispondono alle assintotiche della evolvente S. L'assintotica Γ di Σ, che corrisponde all'assintotica C di S, rimane evidentemente fissa. Di più le formole che danno l'elemento lineare della evoluta Σ dimostrano che le varie forme assunte da Σ sono applicabili in guisa che i punti della Γ rimangono fissi. Abbiamo dunque il teorema: *Se una superficie pseudosferica S si flette, restando rigida un'assintotica C e conservando lungo C gli stessi raggi principali di curvatura, ciascuna falda dell'evoluta si flette egualmente restando rigida la corrispondente assintotica Γ.*

« Inversamente per ogni superficie (non rigata) applicabile sul catenoide il teorema precedente dà, come facilmente si vede, tutte le flessioni possibili che lasciano rigida un'assintotica, salvo naturalmente quella in cui la superficie diventa rigata, cioè le geodetiche deformate dei meridiani del catenoide si rettificano. Una tale deformazione esiste effettivamente, come dimostra il teorema seguente, che ci limitiamo ad enunciare:

« Sia Σ una superficie applicabile sul catenoide, A una sua linea assintotica; se nei punti di A conduciamo le tangenti alle curve deformate dei meridiani del catenoide, la superficie rigata Σ', che così si forma, ammette la medesima linea A per assintotica ed è applicabile sopra Σ in guisa che i punti di A corrispondono nell'applicabilità a sè stessi ».

Chimica. — *Osservazioni sulle Memorie del dott. Klein riguardanti la santonina.* Nota del Socio S. Cannizzaro.

« In una nuova pubblicazione negli « Archiv der Pharmacie » (1) il dott. Joseph Klein persiste nella strana asserzione che l'acido santonoso, ottenuto da me e da Carnelutti per l'azione dell'acido jodidrico sulla santonina, abbia la formola $C_{15} H_{22} O_3$ (2) e non quella $C_{15} H_{20} O_3$ da noi adottata.

« Per cortesia verso il sig. Klein, voglio supporre che egli non abbia letto le varie Memorie originali nelle quali è dimostrata la formola $C_{15} H_{20} O_3$, e perciò stimo non sia superfluo ricordare alcune almeno di quelle Memorie.

« In quella sui due acidi isomeri santonoso ed isosantonoso di Cannizzaro e Carnelutti (3), non solo è riferito lo studio accurato di questi due acidi, ma sono altresì descritti molti derivati di essi, cioè: il santonito e l'iso-santonito etilico, il benzoil-santonito ed il benzoil-iso-santonito etilico, l'etil-santonito e l'etil-iso-santonito etilico, l'acido etil-santonoso e l'etil-iso-santonoso. Di tutti questi derivati, non che degli acidi, sono fedelmente riferite le analisi elementari, le quali tutte concordano mirabilmente, e non lasciano alcun adito al dubbio sulla formola $C_{15} H_{20} O_3$ assegnata ai due acidi isomeri.

« Recentemente il dott. Andreocci, avendo trovato il metodo di convertire quantitativamente la santonina in acido santonoso destrogiro, per l'azione cioè del cloruro stannoso in soluzione cloridrica (4), ha dimostrato l'identità dell'acido, così ottenuto, con quello preparato da me e da Carnelutti per azione dell'acido jodidrico; ne ha confermato i caratteri fisici, compreso quello importantissimo del potere rotatorio, e la formola $C_{15} H_{20} O_3$.

« Egli ha poi preparato due altri isomeri dell'acido santonoso (5): il

(1) Archiv der Pharmacie. 231 Bd. 9. Heft. 1893, pag. 695. *Ueber das Santonin.* IV.
(2) Idem, pag. 697-698.
(3) Gazzetta chimica italiana, vol. XII (1882), pag. 393.
(4) R. Accademia dei Lincei. Rendiconti, anno 1893, serie 5ª, vol. II, pag. 376. — Gazzetta chimica italiana, t. XXIII, vol. II (1893), pag. 489.
(5) Gazz. chim. ital. t. XXIII (1893), vol. II, pag. 468. *Sopra due nuovi isomeri della santonina e due nuovi isomeri dell'acido santonoso.*