ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° Semestre

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

« Per meglio precisare la natura dell' acido ora descritto lo abbiamo fatto bollire con soluzione acquosa di potassa raccogliendo la metilammina in acido cloridrico e trattando indi il distillato, dopo eliminazione dell' eccesso di acido cloridrico, con cloruro platinico. Il sale di platino risultante, per aspetto e solubilità, lo abbiamo riconosciuto pel cloroplatinato di metilammina. All'analisi ha fornito questi risultati:

gr. 0,2076 di sale hanno dato gr. 0,0852 di platino.

« Da cui:

	trovato	calcolato
Platino per cento	41,04	41,29

« D'altra parte il liquido alcalino residuo della distillazione soprasaturato con acido cloridrico ha separato acido fumarico.

« Dai quali fatti risulta in modo indubbio che l'acido in quistione è realmente acido metilfumarammico.

« Il nostro acido pel punto di fusione e per l'abito differisce notevolmente da quello descritto sotto lo stesso nome dal Giustiniani (1), e siccome non rimane dubbio alcuno sulla natura del nostro, quello avuto dal signor Giustiniani, qualora sia stato puro, non può essere acido metilfumarammico, ma deve avere una costituzione differente ».

Meccanica. — *Del moto di rotazione dei corpi rigidi.* Nota del Corrispondente E. Padova.

« Le Memorie della sig.ª Kowalewsky inserite nei tomi XII e XIV degli *Acta Mathematica* non escludono la possibilità che, variando opportunamente la funzione potenziale delle forze attive, che agiscono sopra un corpo rigido girevole attorno ad un punto fisso, non si possa pervenire ad un terzo integrale primo algebrico, oltre ai due ben noti delle aree e delle forze vive, collo stesso processo che si segue pei corpi pesanti. Dimostrerò ora che ciò non ha luogo, che cioè se con quel metodo o con un altro analogo, che può considerarsi come una estensione di quello, si cercano le condizioni sotto le quali si può avere un terzo integrale, colla sola ipotesi che la funzione potenziale sia reale, si è sempre ricondotti al caso considerato dalla sig.ª Kowalewsky; ma tolta la restrizione, pur necessaria nella meccanica, che la funzione potenziale sia reale, si presenta un caso nuovo nel quale si ottiene un terzo integrale primo algebrico.

« Adottando come coordinate indipendenti gli angoli di Euler e supponendo che, oltre all' integrale delle forze vive, si abbia quello delle aree

(1) Gazzetta Chimica, 22, 171.

pel piano xy, la funzione potenziale U non potrà contenere la variabile ψ e quindi le equazioni del moto assumeranno la forma

$$(1)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = (B-C)\,qr + \dfrac{\operatorname{sen}\varphi\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}\dfrac{\partial U}{\partial\varphi} - \cos\varphi\dfrac{\partial U}{\partial\vartheta} \\ B\dfrac{dq}{dt} = (C-A)\,pr + \dfrac{\cos\varphi\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}\dfrac{\partial U}{\partial\varphi} + \operatorname{sen}\varphi\dfrac{\partial U}{\partial\vartheta} \\ C\dfrac{dr}{dt} = (A-B)\,pq + \dfrac{\partial U}{\partial\varphi} \end{cases}$$

dalle quali si ha

$$(2)\quad A\frac{d(p+iq)}{dt} + i\,(B-A)\frac{dq}{di} = -ir\,[(A-C)(p+iq) + i\,(B-A)\,q] + \\ + ie^{-i\varphi}\cos\vartheta\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\varphi} + \frac{i}{\cos\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right),$$

perchè il prodotto del primo membro per una funzione f di ϑ, φ, p, q possa essere la derivata rapporto al tempo del prodotto di f pel coefficiente di $-ir$ nel secondo membro, è necessario che sia o $C=0$, o $B=A$; escludiamo il primo caso, che corrisponderebbe al problema del moto di una retta, il quale dipende da due sole variabili e supponiamo $A=B$. Moltiplichiamo allora la (2) per l'equazione

$$p+iq = -\frac{ie^{-i\varphi}\operatorname{sen}\vartheta}{\cos\vartheta}\,r - \frac{1}{\cos\vartheta}\frac{d}{dt}\,(e^{-i\varphi}\operatorname{sen}\vartheta),$$

che resulta immediatamente dalle equazioni

$$p = \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta\psi' - \cos\varphi\vartheta', \quad q = \cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta\psi' + \operatorname{sen}\varphi\vartheta', \quad r = \varphi' - \cos\vartheta\psi',$$

ed avremo

$$\frac{A}{2}\frac{d(p+iq)^2}{dt} = -ir\,(A-C)\,(p+iq)^2 + \\ + \left[-ir\operatorname{sen}\vartheta\,e^{-i\varphi} - \frac{d}{dt}(\operatorname{sen}\vartheta\,e^{-i\varphi})\right]e^{-i\varphi}\left(\frac{i}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\vartheta} - \frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right).$$

Questa equazione non potrà darci la derivata di una certa funzione uguale alla funzione stessa moltiplicata per $-ir$ a meno che non sia $A=2C$ e costante il prodotto

$$ie^{-i\varphi}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\varphi} + \frac{i}{\cos\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right);$$

se $a+bi$ è questa costante ed U è reale questa equazione si scinderà nelle due

$$\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\varphi} - \frac{\cos\varphi}{\cos\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\vartheta} = a, \qquad \frac{\cos\varphi}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\varphi} + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\vartheta}\frac{\partial U}{\partial\vartheta} = b$$

le quali danno

$$U = -a\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi + b\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi.$$

La funzione delle forze è quella della gravità e ritorniamo al caso considerato dalla sig.ª Kowalewsky.

« Moltiplichiamo invece la terza delle (1) per i ed aggiungiamola alla seconda, vedremo come precedentemente che due momenti d'inerzia devono essere uguali fra loro, cioè $B = C$, e si avrà

$$B\frac{d(q+ir)}{dt} = -ip(B-A)(q+ir) + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\varphi\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}+i\right)+\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\operatorname{sen}\varphi\ ;$$

d'altra parte abbiamo

$$q+ir = \operatorname{sen}\varphi.\vartheta' + (\cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta - i\cos\vartheta)\psi' + i\varphi'$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\vartheta}\left[p(\cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta - i\cos\vartheta) - i\frac{d}{dt}(\cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta - i\cos\vartheta)\right]$$

quindi

$$\frac{B}{2}\frac{d(q+ir)^2}{dt} = -ip(B-A)(q+ir)^2 +$$

$$+\left[-ip(\cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta - i\cos\vartheta) - \frac{d}{dt}(\cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta - i\cos\vartheta)\right]\cdot$$

$$\cdot\frac{i}{\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi}\left[\frac{\partial U}{\partial\varphi}\left(\frac{\cos\varphi\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}+i\right)+\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\operatorname{sen}\varphi\right].$$

Ora se si vuole che il prodotto degli ultimi due fattori dell'ultimo termine sia costante e che U, oltre all'essere reale non sia indipendente da φ, è necessario che si abbia

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi} = b\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi\ ,\quad \frac{\partial U}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi\cos\vartheta}{\operatorname{sen}\vartheta}+\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\operatorname{sen}\varphi = 0,$$

donde

$$U = -b\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi\ ,$$

ritorniamo al caso in cui le forze sono dovute alla gravità; si ha inoltre $C = B = 2A$ e quindi

$$\frac{d}{dt}\log\left[(q+ir)^2 - b(\cos\varphi\operatorname{sen}\vartheta - i\cos\vartheta)\right] = -ip\ ,$$

vale a dire

$$\frac{d}{dt}\log\left[(q+ir)^2 + b(\gamma_2+i\gamma_3)\right] = -ip\ ,$$

si ritrova l'integrale della sig.ª Kowalewsky con un semplice cangiamento di notazioni.

« Ma estendiamo questo metodo; cominciamo per ciò dall'osservare che se due momenti d'inerzia sono tra loro uguali, per es. $A = B$, se la funzione delle forze è indipendente da ψ e se i termini di grado più elevato nelle derivate p_1, p_2, p_3 della funzione caratteristica in un integrale algebrico si possono raccogliere sotto la forma $\alpha(p^2+q^2)^m$, il coefficiente α è

costante. Infatti se una equazione algebrica $H_2 = h_2$ costituisce un sistema jacobiano colle due

$$H \equiv T - U = h \qquad H_1 \equiv p_3 = h_1 ,$$

dovranno costituire un sistema in involuzione con queste due tanto l'insieme dei termini di grado pari di H_2, quanto quello dei termini di grado dispari, di più ponendo separatamente uguali a zero i coefficienti della funzione alternata $(H, \alpha(p^2 + q^2)^m)$, si riconosce che α, certamente indipendente da ψ, deve essere costante. Potremo quindi in un integrale algebrico, il cui termine di grado più elevato abbia la forma $\alpha(p^2 + q^2)^m$, supporre il coefficiente α uguale ad 1 e gli altri termini dovranno rispetto alle p_1, p_2, p_3 e quindi anche rispetto alle p, q, r, che sono linearmente collegate con quelle, essere di ordine $2m - 2$, $2m - 4, \ldots$. Ciò posto vediamo se e quando si potrà avere un integrale algebrico della forma

$$[(p + iq)^m + \alpha_1 (p + iq)^{m-2} + \cdots][(p - iq)^m + \alpha_2 (p - iq)^{m-2} + \cdots] = h^2$$

ove $\alpha_2, \ldots$ sono le quantità complesse coniugate di $\alpha_1, \ldots$; questo avverrà quando la derivata rapporto al tempo di ciascun fattore si riduca, in forza delle (1), al fattore stesso moltiplicato per una quantità puramente immaginaria. Se si suppone m dispari è facile vedere che U dovrebbe essere costante; supponiamo quindi m pari e per fissare le idee uguale a 4. Per brevità poniamo $x_1 = p + iq$, $x_2 = p - iq$, $y_1 = -i \operatorname{sen} \vartheta\, e^{-i\varphi}$, $y_2 = i \operatorname{sen} \vartheta\, e^{i\varphi}$, dovremo avere

$$\frac{d}{dt}[x_1^4 + \alpha_1 x_1^2 + \beta_1] = i\lambda (x_1^4 + \alpha_1 x_1^2 + \beta_1)$$

ossia per le (1), ove si faccia $A = B$,

$$(3) \qquad -4i \frac{A - C}{A} x_1^4 r - 2\alpha_1 ir \frac{A - C}{A} \alpha_1^2 + \alpha'_1 x_1^2 + \beta'_1 +$$
$$+ (4x_1^3 + 2\alpha_1 x_1) \frac{ie^{-i\varphi}}{A \operatorname{sen} \vartheta} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \vartheta + i \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \operatorname{sen} \vartheta \right) = i\lambda (x_1^4 + \alpha_1 x_1^2 + \beta_1)$$

quindi $\lambda = -4 \dfrac{A - C}{A} r$, e poichè è

$$x_1 \cos \vartheta = r y_1 - i y'_1$$

sarà, uguagliando i coefficienti di x_1^2 nei due membri,

$$-4ir \frac{A - C}{A} \alpha_1 = \alpha'_1 - 2ir \frac{A - C}{A} \alpha_1 +$$
$$+ 4 \frac{ie^{-i\varphi}}{A \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta} \left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \vartheta + i \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \operatorname{sen} \vartheta \right) (r y_1 - i y'_1)$$

e, poichè la ψ' non apparisce che in r in questa equazione, dovremo avere separatamente

$$(A - C)\,\alpha_1 + 2e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta} + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\frac{i}{\cos\vartheta}\right) y_1 = 0\,,$$

$$\alpha'_1 + \frac{4e^{-i\varphi}}{A}\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta} + \frac{\partial U}{\partial \vartheta}\frac{i}{\cos\vartheta}\right) y'_1 = 0\,,$$

dalle quali si ha, dividendo l'una per l'altra,

$$\frac{2y'_1}{y_1} = \frac{A}{A - C}\frac{\alpha'_1}{\alpha_1}\,,$$

d'onde

$$\alpha_1 = c_1 y_1^{2\frac{A-C}{A}}\,,$$

ove c_1 è una costante d'integrazione, quindi sarà

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \varphi} + \frac{i}{\cos\vartheta}\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -\frac{A - C}{2}\,c_1 e^{i\varphi} y_1 \frac{A - 2C}{A}$$

ossia, ponendo per brevità $\frac{A-2C}{A} = s$, se U è una funzione reale,

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -c_1\frac{A - C}{2}\operatorname{sen}^{s+1}\vartheta\,.\cos\left(s\frac{\pi}{2} - s\varphi + \varphi\right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = -c_1\frac{A - C}{2}\operatorname{sen}^{s}\vartheta\,.\cos\vartheta\,\operatorname{sen}\left(s\frac{\pi}{2} - s\varphi + \varphi\right),$$

i due secondi membri non possono rappresentare le derivate di una stessa funzione, a meno che non sia $s = 0$, ossia $A = 2C$ ed allora sarà

$$U = -c_1\frac{A - C}{2}\operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi.$$

Confrontando poi i coefficienti di x_1^0 nella (3) si ottiene $\beta_1 = \frac{\alpha_1^2}{4}$; quindi il nostro integrale assume la forma

$$\left(x_1^2 + \frac{\alpha_1}{2}\right)^2\left(x_2^2 + \frac{\alpha_2}{2}\right)^2 = k^2$$

e si riconosce che non è che il quadrato dell'integrale trovato dalla sig.ª Kowalewsky.

« Se si assume come funzione delle forze

$$U = -\frac{a + bi}{2}(\gamma_1 + i\gamma_2) = \frac{ie^{-i\varphi}}{2}\operatorname{sen}\vartheta\,(a + bi)$$

si riconosce facilmente che oltre all'integrale delle forze vive ed a quello delle aree pel piano xy, ha luogo il terzo integrale algebrico

$$(p^2 + q^2)^2 + (p + iq)^2\,(b - ia)\,e^{i\varphi}\operatorname{sen}\vartheta = k$$

ma in questo caso la funzione delle forze contiene termini immaginari ».