ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

specialmente il valore del dott. Berberich, tiene testa alle irruenti scoperte fotografiche, ma sono ben note le fatiche di calcolo domandate da ciascuno di questi pianeti, e si può prevedere che in avvenire le perdite si succederanno ai ritrovamenti, se per questo argomento, e per tanti altri, che il metodo moderno fotografico offre, non vi sia il concorso collettivo di forze internazionali in un Istituto grandioso di calcolo, che a tutto possa provvedere. Non è qui mio proposito di sviluppare questa idea, perchè sarebbe necessario dimostrare quanto materiale possa porgere la fotografia al calcolo in confronto dei metodi attuali di osservazione diretta, nelle diverse parti della scienza, ma lo accennarla non mi parve mal fatto ».

Chimica. — *Sul potere rifrangente dei composti contenenti il carbonile.* Nota di R. Nasini e F. Anderlini.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sulle superficie algebriche che ammettono un sistema doppiamente infinito di sezioni piane riduttibili.* Nota di Guido Castelnuovo, presentata dal Socio Cremona.

« L'illustre Kronecker assistendo ad una seduta di questa Accademia (2 maggio 1886) (1) comunicò verbalmente un suo teorema *Sulle superficie algebriche irreduttibili aventi infinite sezioni piane che si spezzano in due curve*; e manifestò l'intenzione di presentare in seguito (per l'inserzione nei Rendiconti) una Nota contenente il preciso enunciato e la dimostrazione di quel teorema. La Nota però non fu più inviata all'Accademia (nè pubblicata altrove), tanto che del teorema non rimane nessuna traccia sicura. Tuttavia le informazioni che gentilmente mi diedero i prof. Cremona e Cerruti presenti a quella seduta, ed alcuni amici i quali ebbero occasione di discorrere col Kronecker, mi inducono a ritenere che il nominato teorema coincida con quello che si trova enunciato e dimostrato nella presente Nota. La mia dimostrazione differirà probabilmente in vari punti da quella che il Kronecker aveva in mente; della quale sarebbe desiderabile una ricostruzione, se nei manoscritti lasciati dal compianto geometra di Berlino si trovassero traccie sufficienti.

« Il teorema che qui si tratta di dimostrare, può enunciarsi così:

« Una superficie algebrica irriduttibile, la quale dai piani di un sistema doppiamente infinito venga segata in

(1) Si vedano in proposito i Rendiconti dell'Acc. d. Lincei, serie 4a, vol. II.

curve riduttibili, è rigata oppure è la superficie di Steiner (del quarto ordine, con tre rette doppie concorrenti in un punto triplo, segata in due coniche da ogni piano tangente).

« È chiaro che una rigata viene segata da ∞^2 piani in curve riduttibili: ogni generatrice appartiene ad ∞^1 di tali sezioni. Noi potremo dunque limitarci a considerare quelle superficie *non rigate* che godono la proprietà enunciata nel teorema.

« Indichiamo con F una di siffatte superficie, con π uno generico degli ∞^2 piani secanti F lungo curve riduttibili, con $C_1, C_2 \ldots C_i$ ($i \geqq 2$) le componenti irriduttibili della sezione praticata con π. Ed osserviamo anzitutto che se due delle i curve giacenti su π hanno in comune un punto P semplice per F, il piano π è tangente alla F in P. Dal che segue subito che due tra le i curve del piano generico π non possono coincidere, poichè altrimenti π toccherebbe F lungo una curva, e potendosi ripetere altrettanto per ciascuno degli ∞^2 piani, ogni punto di F avrebbe ∞^1 piani tangenti, il che è assurdo.

« Ciò premesso, facciamo variare con continutà il piano π entro al sistema ∞^2, (sistema evidentemente algebrico, perchè algebrica è la condizione di riduttibilità di una sezione di F). Al variare di π le linee $C_1, C_2 \ldots C_i$ (che non sono rette) varieranno sopra F con continuità (conservando quindi inalterati i loro ordini, generi ....), e descriveranno certi sistemi algebrici doppiamente infiniti. Indichiamo con Σ_1 il sistema ∞^2 di tutte le curve di F su cui si porta C_1 al variare di π: e analogamente siano $\Sigma_2, \ldots \Sigma_i$ i sistemi descritti da $C_2, \ldots C_i$; non è escluso che questi sistemi algebrici possano in parte o tutti coincidere (quando due o più curve irriduttibili di π appartengano ad uno stesso sistema algebrico ∞^2).

« Per due punti generici di F passano una o più curve di ciascuno dei sistemi $\Sigma_1, \Sigma_2 \ldots \Sigma_i$; e le curve del sistema Σ_1 (ad es.) che passano per un punto P generico di F, formano un sistema algebrico ∞^1 che indicheremo con Σ'_1. La curva generica C_1 di Σ'_1 sta in un piano, il quale sega inoltre F lungo $i - 1$ curve $C_2 \ldots C_i$; ma queste non passano per P, perchè altrimenti quel piano, generico in un sistema ∞^1, toccherebbe la superficie F in P, mentre uno solo è il piano tangente ad F in P. Ne viene che mentre C_1 descrive il sistema Σ'_1, la curva C_2 descrive un sistema algebrico, pure ∞^1, Σ'_2 *certo distinto* da Σ'_1. Vi sarà almeno una curva C_2 di Σ'_2 che passerà per P, la qual curva, insieme alla C_1 di Σ'_1 che giace nel suo piano, darà una curva composta $C_1 + C_2$ avente un punto doppio in P; quel piano dunque sarà tangente ad F in P. E così si vede intanto che il piano π tangente ad F in un punto generico P appartiene al sistema ∞^2 dei piani secanti F lungo curve riduttibili, e che pel punto di contatto P passano due C_1, C_2 tra le curve componenti la sezione piana. Anzi pel punto P non può passare una terza componente C_3, poichè altrimenti P sarebbe (punto triplo per la sezione con π e quindi) punto di flesso per la curva segata su F da un piano generico per P; ma essendo P un punto generico di F quella curva dovrebbe ridursi ad una retta (avendo ∞^1 flessi) e quindi F sarebbe un piano, il che evidentemente si esclude.

« Noi ora vogliamo determinare il numero dei punti comuni a due curve generiche C_1, C_2 l'una di Σ_1, l'altra di Σ_2. Osserviamo anzitutto che se i due sistemi algebrici ∞^2 Σ_1 e Σ_2 coincidono, può ben accadere che due curve C_1 e C_2 abbiano una sola intersezione (certo *una* almeno), nel qual caso per due punti generici di F passa una sola curva del sistema $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$. Ma se Σ_1 e Σ_2 sono distinti, poichè per due punti generici di F deve passare almeno una curva di Σ_1 ed una (diversa) di Σ_2, segue che *due* almeno sono le intersezioni di C_1 e C_2. Premesse queste considerazioni (che possono ripetersi per due qualisivogliano dei sistemi $\Sigma_1 \ldots \Sigma_i$) riprendiamo il piano π tangente ad F in P, e le curve $C_1, C_2 \ldots C_i$ ($i \geqq 2$) che esso sega su F, delle quali due sole C_1 e C_2 passano per P. Supponiamo poi che un punto si muova con continuità sulla superficie F partendo da P e descrivendo una curva qualsiasi γ; ed insieme al punto mobile consideriamo il piano mobile ivi tangente ad F, e le successive posizioni che su F va assumendo la curva C_1 al variare del piano stesso. Siano P', π', C'_1 tre posizioni corrispondenti dei tre elementi mobili (punto, piano, e curva). La curva C'_1 del piano π' sega la curva fissa $C_2 + \ldots + C_i$ del piano fisso π, in un certo numero $k \geqq i - 1$ di punti $M'_1, \ldots, M'_k$, i quali si trovano sulla retta $\pi\pi'$ comune ai due piani. Se ora facciamo che il punto P' torni alla posizione iniziale P lungo la γ, e seguiamo nei loro movimenti il piano π' e la curva C'_1, vediamo che i punti $M'_1, \ldots, M'_k$ andranno muovendosi con continuità lungo le curve fisse $C_2, \ldots, C_i$, mentre la retta $\pi\pi'$ che li contiene varia con continuità sul piano fisso π. Al limite, per P' coincidente con P, la curva C'_1 si è portata sulla C_1 di π, ed i punti $M'_1, \ldots, M'_k$ sono venuti a cadere in certi punti $M_1, \ldots, M_k$ comuni alle due curve C_1 e $C_2 + \ldots + C_i$, dei quali punti uno almeno cade in P. La retta $\pi\pi'$ (contenente i punti $M'_1, \ldots, M'_k$) ammette alla sua volta come posizione limite (per una nota proprietà) quella retta t' del fascio (P, π) che è *tangente coniugata* (rispetto ad F) alla tangente t a γ in P; sulla t' adunque devono cadere, oltre a P, altre $k - 1$ intersezioni delle due curve C_1 e $C_2 + \ldots + C_i$ (1). Ora si osservi che la curva γ, di cui ci siamo valsi nell'ultimo ragionamento, è in nostro arbitrio. Si faccia variare γ su F intorno a P, in guisa che la sua tangente t in P

(1) Di queste intersezioni alcune, giacenti su C_2, possono anche venire a cadere in P; allora però t' riesce tangente a C_2 in P, perchè P è punto semplice per C_2. (Se infatti P fosse doppio per C_2, esso riuscirebbe almeno triplo per la sezione completa di F con π, e ciò non è possibile, come sopra si dimostrò).

descriva il fascio (P, π); sempre troveremo che $k-1$ intersezioni, oltre a P, delle due curve fisse C_1 e $C_2 + \ldots + C_i$ devono giacere sulla retta t' passante per P e tangente coniugata alla tangente variabile t. Ora se si suppone $k-1>0$, deve certo presentarsi uno dei due casi seguenti: o mentre t descrive il fascio (P, π), la tangente coniugata t' varia essa pure, e variano in conseguenza le $k-1$ intersezioni nominate, sicchè le due curve C_1 e $C_2 + \ldots + C_i$ hanno infiniti punti in comune, il che però abbiamo dimostrato assurdo sin dal principio; oppure t' non varia al variare di t, e allora il punto P (generico di F) è un punto parabolico, e la F che ha tutti i suoi punti parabolici è una *superficie sviluppabile* (nota proprietà di Geometria differenziale), mentre le sviluppabili (particolari rigate) furono escluse dalle nostre ricerche.

« Dobbiamo dunque concludere che $k-1=0$, $k=1$, ossia che la curva generica del sistema Σ_1 sega in un sol punto la curva $C_2 + \ldots + C_i$. Dal che segue anzitutto che $i=2$ (perchè $k \geqq i-1$), e in secondo luogo che coincidono i sistemi Σ_1, Σ_2 descritti dalle curve C_1 e C_2 (perchè ogni curva di Σ_1 incontra in un sol punto ogni curva di Σ_2). Segue finalmente che le curve C_1 dell'unico sistema $\Sigma_1 \equiv \Sigma_2$ sono coniche, perchè una C_1 è segata da ciascuno degli ∞^2 piani tangenti ad F in due soli punti (intersezioni di C_1 coll'una e coll'altra delle due curve di Σ_1 che costituiscono l'intersezione di F col piano tangente considerato). Sicchè concludiamo che la superficie F contiene un sistema doppiamente infinito di coniche tali che due coniche si segano in un sol punto e per due punti passa una sola conica; la sezione di F con un suo piano tangente generico è costituita da due coniche del sistema passanti pel punto di contatto (e secantisi ulteriormente in tre punti doppi per F). La F dunque ha *l'ordine* 4, ed è la nota *superficie di Steiner*, il che appunto si doveva dimostrare.

« Quali corollari immediati del teorema ora dimostrato possono considerarsi ad es. una proposizione del sig. Darboux (1), (secondo la quale le superficie contenenti ∞^2 coniche sono quadriche, o rigate cubiche, o superficie di Steiner), ed il noto teorema dei sigg. Picard (2) e Guccia (3) il quale afferma che ogni superficie di cui le sezioni piane sono curve razionali è rigata oppure è la superficie di Steiner. Il teorema del presente lavoro può anche giovare nello studio delle superficie a sezioni piane ellittiche, come mostrerò in un'altra Nota ».

(1) *Sur le contact des courbes et des surfaces.* Bulletin des Sciences Mathém. 1880.

(2) *Sur les surfaces algébriques dont toutes les sections planes sont unicursales.* Journal für die r. u. a. Mathem. Bd. 100.

(3) *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve unicursali.* Rendic. Circolo Matem. di Palermo, tomo I.