ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

« Ecco i tre nuovi sistemi ricorretti:

	Ima opposizione	II da opposizione	III za opposizione
T (epoca):	1891 febb. 20,5 B	1892 maggio 5,0 B	1893 luglio 19,0 B
L	138° 21′ 26″. 6	216° 47′ 5″. 7	295° 22′ 27″. 0
π	58 27 58. 3	58 27 15. 0	58 42 8. 8
M	79 53 28. 2	158 19 50. 7	236 40 18. 2
Ω	345 15 51. 9	345 15 39. 8	345 14 27. 0
i	6 54 26. 2	6 54 24. 2	6 54 24. 2
φ	3 36 4. 6	3 37 36. 2	3 39 19. 9
μ	642″. 668528	642″ 878448	643″ 399448
loga	0. 494680	0 494585	0 494351
	Eclittica 1892. 0	Eclittica 1892. 0	Eclittica 1892. 0

« Gli elementi, or ora scritti, soddisfacendo alla prima e seconda opposizione, rappresentano il luogo corrispondente alle osservazioni del D.r Cerulli in terza oppesizione nel seguente modo:

$$1893.\ 11\ \text{Agosto}\ 12^{h}\ \text{B}\ \begin{cases} \text{O} - \text{C} & 15\,\varDelta\alpha \cos\delta & +1''.1 \\ \text{O} - \text{C} & \varDelta\delta & -2.5 \end{cases} \text{».}$$

Geodesia. — *Sulla espressione della gravità alla superficie del geoide, supposto ellissoidico*. Nota del prof. PAOLO PIZZETTI, presentata dal Socio BELTRAMI.

« § 1. Estendiamo la ricerca della Nota precedente, indagando quale sia la espressione esatta della gravità sulla superficie del geoide, quando questa superficie si supponga essere un ellissoide *qualunque*, del quale un asse coincida con quello della rotazione diurna.

« Non possiamo qui, generalmente procedere, come nei §§ 3, 4 della Nota 1^{a}, ad una semplice applicazione delle formole (1) (2). Non conosciamo infatti, come nel caso speciale dell'ellissoide di rotazione schiacciato, una particolar distribuzione Σ_0 di materia, per la quale l'ellissoide qualunque sia figura di equilibrio, tenuto conto della rotazione attorno ad uno degli assi (a meno che non si tratti di uno di quegli ellissoidi, così detti di Jacobi, che possono essere figura d'equilibrio per una massa fluida omogenea ruotante).

« § 2. Cerchiamo pertanto di risolvere il problema seguente: Trovare una funzione V la quale, in tutto lo spazio esteriore all'ellissoide

$$\text{(S)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,,$$

soddisfaccia alle condizioni cui è soggetta la funzione potenziale nel vuoto, e che sulla superficie dell'ellissoide stesso si riduca alla forma

$$costante - \frac{\omega^2}{2f}(y^2 + z^2) \; .$$

« Il seguente tentativo conduce senza incertezza al risultato. Per analogia colla formola che esprime il potenziale dell'attrazione di un ellissoide omogeneo sopra un punto esterno, poniamo a priori che la cercata funzione V possa esprimersi così:

$$\text{(1)} \qquad V = x^2 \int_\lambda^\infty \frac{F(s)\, ds}{\sqrt{R}} + y^2 \int_\lambda^\infty \frac{\Phi(s)\, ds}{\sqrt{R}} + z^2 \int_\lambda^\infty \frac{\Psi(s)\, ds}{\sqrt{R}} \; ,$$

dove

$$\text{(2)} \qquad R = (a^2 + s)(b^2 + s)(c^2 + s) \; ,$$

λ è la maggior radice dell'equazione

$$\text{(3)} \qquad \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 \; ,$$

ed F, Φ, Ψ sono funzioni da determinarsi, se è possibile, in modo che, per $\lambda > 0$, la V soddisfaccia alla equazione $\Delta_2 V = 0$.

« Posto:

$$\text{(4)} \qquad P^2 = \frac{x^2}{(a^2 + \lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2 + \lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2 + \lambda)^2} \; ,$$

$$\text{(5)} \qquad R_1 = (a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda) \; ,$$

avremo, differenziando la (3) e considerandovi λ come funzione di x, y, z:

$$\text{(6)} \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial x} = \frac{2x}{(a^2 + \lambda) P^2}$$

ed altre due analoghe; donde ricaviamo:

$$\text{(7)} \qquad \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2 = \frac{4}{P^2}$$

$$\text{(7')} \qquad \Delta_2 \lambda = \frac{2}{P^2 R_1} \frac{dR_1}{d\lambda}$$

Se, coll'aiuto di queste formole, si deduce dalla (1) il $\Delta_2 V$, se si moltiplica il risultato per P^2 e si eguaglia a zero, si è condotti alle seguenti equazioni:

$$\text{(8)} \qquad \begin{cases} H\sqrt{R_1} - 4(a^2 + \lambda) F - 2(a^2 + \lambda)^2 F' = 0 \; , \\ H\sqrt{R_1} - 4(b^2 + \lambda) \Phi - 2(b^2 + \lambda)^2 \Phi' = 0 \; , \\ H\sqrt{R_1} - 4(c^2 + \lambda) \Psi - 2(c^2 + \lambda)^2 \Psi' = 0 \; , \end{cases}$$

dove, per semplicità si è posto:

$$H = \int_\lambda^\infty \left\{ F(s) + \Phi(s) + \Psi(s) \right\} \frac{ds}{\sqrt{R}} \; ,$$

e si è indicato con F , F′ la funzione F (λ) e la sua derivata prima rispetto a λ, e analogamente per le altre.

« Eliminando H fra le (8), otteniamo due equazioni che possono scriversi:

$$\frac{d}{d\lambda}\left\{(a^2+\lambda)^2\,\mathrm{F}\right\}=\frac{d}{d\lambda}\left\{(b^2+\lambda)^2\,\Phi\right\}=\frac{d}{d\lambda}\left\{(c^2+\lambda)^2\,\Psi\right\},$$

donde integrando, e indicando con h', h'' due costanti, si deduce che F , Φ , Ψ debbono potersi mettere sotto la forma:

$$(9)\qquad \mathrm{F}=\frac{\theta}{(a^2+\lambda)^2},\quad \Phi=\frac{\theta-2h'}{(b^2+\lambda)^2},\quad \Psi=\frac{\theta-2h''}{(c^2+\lambda)^2}\,.$$

dove θ è una novella funzione di λ. Differenziando la prima delle (8) rispetto a λ, dopo averla divisa per $\sqrt{\mathrm{R}_1}$, poi sostituendo per F , Φ , Ψ le espressioni (9), e finalmente moltiplicando nuovamente per $\sqrt{\mathrm{R}_1}$, abbiamo, per determinare θ, una equazione alle derivate totali, che può scriversi:

$$2\theta''-\frac{d}{d\lambda}\left\{\frac{\theta}{a^2+\lambda}+\frac{\theta}{b^2+\lambda}+\frac{\theta}{c^2+\lambda}\right\}-\frac{2h'}{(b^2+\lambda)^2}-\frac{2h''}{(c^2+\lambda)^2}=0$$

Integrando, rispetto a λ, termine a termine, si ottiene un'equazione lineare del 1° ordine, dalla quale, colla nota regola, si deduce:

$$\theta=\left\{\mathrm{C}+\int_\lambda^\infty\left(t+\frac{h'}{b^2+s}+\frac{h''}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\sqrt{\mathrm{R}}}\right\}\sqrt{\mathrm{R}_1}\ ,$$

dove $-2\,t$ e C sono le costanti introdotte nella 1ª e nella 2ª integrazione rispettivamente.

« Si sostituisca ora l'espressione trovata di θ nelle (9). Cangiando λ in s, si avranno le espressioni di F (s) , $\Phi\,(s)$, $\Psi\,(s)$, le quali sostituite nella (1) ci dànno V. Figureranno nel risultato alcuni integrali doppî, che molto facilmente si riducono ad integrali semplici, mediante l'integrazione per parti. Si trova allora come primo termine, nella espressione di V, la costante C, e poichè V deve annullarsi per $\lambda=\infty$, dovremo porre $\mathrm{C}=0$.

« Otteniamo così finalmente:

$$\begin{aligned}\mathrm{V}=t&\int_\lambda\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\sqrt{\mathrm{R}}}+\\ (10)\qquad +h'&\int_\lambda^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{3y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{(b^2+s)\sqrt{\mathrm{R}}}+\\ +h''&\int_\lambda^\infty\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{3z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{(c^2+s)\sqrt{\mathrm{R}}}\,.\end{aligned}$$

« È facile verificare che questa V gode di tutte le proprietà della funzione potenziale nel vuoto, ed è pur facile vedere che le costanti h', h'' possono determinarsi in guisa che, sull'ellissoide S, la V si riduca alla forma

$$(11)\qquad costante - \frac{\omega^2}{2f}(y^2+z^2)\,.$$

« Ma noi faremo uso di una espressione alquanto più semplice della (10). Osserviamo che quando si determinino le h', h'' nel modo che ora si è detto, si giunge a un risultato della forma

$$h' = m' + n'\,\omega^2\,,$$
$$h'' = m'' + n''\,\omega^2\,,$$

dove m', n', m'', n'' sono indipendenti da ω. Se ora si pone $\omega = 0$, la (10) deve ridursi alla forma che è propria della funzione potenziale esterna, quando l'ellissoide S è *superficie di livello*, ossia, a meno di un fattore costante, a

$$\int_\lambda^\infty \frac{ds}{\sqrt{R}}\,.$$

« La (10) può dunque scriversi così: (¹)

$$(12)\quad V = \frac{M}{2}\int_\lambda^\infty \frac{ds}{\sqrt{R}} + \frac{k'}{f}\int_\lambda^\infty \frac{1}{b^2+s}\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{3y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\sqrt{R}}$$
$$+\frac{k''}{f}\int_\lambda^\infty \frac{1}{c^2+s}\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{3z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\sqrt{R}}$$

dove M è una nuova costante, e k', k'' sono costanti proporzionali ad ω^2.

« § 3. Verifichiamo come la V soddisfaccia alla $\Delta_2 V = 0$, e alle condizioni cui è soggetta la funzione potenziale pei punti a distanza infinita. Scrivendo la (12) sotto la forma:

$$V = M V_1 + \frac{k'}{f}V_2 + \frac{k''}{f}V_3\,,$$

si avrà, per $\lambda > 0$:

$$\Delta_2 V_1 = \frac{1}{4R_1^{\frac{3}{2}}}\frac{dR_1}{d\lambda}\Sigma\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2\sqrt{R_1}}\Sigma\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} = 0$$

in virtù delle (7) (7'). E coll'aiuto di queste stesse formole si trova

$$\Delta_2 V_2 = -2\int_\lambda^\infty \frac{1}{b^2+s}\left(\frac{1}{a^2+s}+\frac{3}{b^2+s}+\frac{1}{c^2+s}\right)\frac{ds}{\sqrt{R}} + \frac{4}{(b^2+\lambda)\sqrt{R_1}}$$
$$= -4\int_\lambda^\infty \left[\frac{1}{(b^2+s)^2}+\frac{1}{2(b^2+s)R}\frac{dR}{d\lambda}\right]\frac{ds}{\sqrt{R}} + \frac{4}{(b^2+\lambda)\sqrt{R_1}} = 0$$

Similmente $\Delta_2 V_3 = 0$.

(¹) Il passaggio dalla (10) alla (12) può giustificarsi, benchè con maggior fatica, per via puramente analitica. Bisogna porre nelle (10):

$$h' = (a^2-b^2)\frac{t}{3}+\frac{k'}{f}\,,\quad h'' = (a^2-c^2)\frac{t}{3}+\frac{k''}{f}\,,\quad t = \frac{3}{4}M$$

« Per un punto $(x\,y\,z)$ il cui raggio vettore r faccia l'angolo ξ coll'asse delle x, si ha, crescendo r all'infinito:

$$\lim \frac{r}{\sqrt{\lambda}} = 1 \,, \quad \lim \frac{x}{\sqrt{\lambda}} = \cos\xi \,. \tag{13}$$

Di più, senza difficoltà si prova che, per $\lambda = \infty$:

$$\begin{gathered} \lim . \sqrt{\lambda} \int_\lambda^\infty \frac{ds}{\sqrt{\mathrm{R}}} = \frac{1}{2} \\ \lim . \sqrt{\lambda} \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{\mathrm{R}}} = 0 \,, \quad \lim \lambda^{\frac{3}{2}} \int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\,(b^2+s)\sqrt{\mathrm{R}}} = 0 \end{gathered} \tag{14}$$

ed analoghe. Coll'aiuto delle (13) (14) si verifica subito che, per $r = \infty$:

$$\lim\,(r\,\mathrm{V}) = \mathrm{M} \,, \quad \lim \left(r^2 \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}\right) = -\,\mathrm{M}\,.\cos\xi.$$

Il 2° membro della (12) esprime dunque il potenziale dell'attrazione di una massa M, per valori positivi di λ.

« § 4. Determiniamo ora k' e k'' in modo che, sulla superficie dell'ellissoide S, la V si riduca alla forma (11). Per questo, indicando con

$$\mathrm{V} = \alpha\, x^2 + \beta\, y^2 + \gamma\, z^2 + \delta \tag{15}$$

quello a cui si riduce la (12) ponendovi $\lambda = 0$, è necessario e sufficiente che sia

$$\begin{gathered} b^2 \beta - a^2 \alpha + \frac{\omega^2 b^2}{2f} = 0 \\ c^2 \gamma - a^2 \alpha + \frac{\omega^2 c^2}{2f} = 0. \end{gathered} \tag{16}$$

Infatti, se queste sono soddisfatte, la (15) può porsi sotto la forma

$$\mathrm{V} = \alpha\, a^2 + \delta - \frac{\omega^2}{2f}(y^2 + z^2)$$

per tutti i valori di $x\,, y\,, z$ che soddisfanno alla equazione (S).

« Poniamo per brevità:

$$\begin{gathered} \mathrm{B}_1 = \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2+s)^2\sqrt{\mathrm{R}}} \,, \quad \mathrm{C}_1 = \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2+s)^2\sqrt{\mathrm{R}}} \,, \\ \mathrm{A}_2 = \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2+s)\,(c^2+s)\sqrt{\mathrm{R}}} \,, \quad \mathrm{B}_2 = \int_0^\infty \frac{ds}{(a_2+s)\,(c_2+s)\sqrt{\mathrm{R}}} \,, \\ \mathrm{C}_2 = \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\,(b^2+s)\sqrt{\mathrm{R}}} \,. \end{gathered} \tag{17}$$

Fra questi integrali passano le relazioni:

$$(18)\quad \begin{aligned} A_2 + 3B_1 + C_2 &= \frac{2}{a\,b^3\,c}\,, \\ A_2 + B_2 + 3C_1 &= \frac{2}{a\,b\,c^3}\,. \end{aligned}$$

Sostituendo nelle (16) per α, β, γ, le loro espressioni abbiamo:

$$(19)\quad \begin{aligned} k'(3\,b^3\,B_1 - a^2\,C_2) + k''(b^2\,A_2 - a^2\,B_2) &= \frac{b^2\,\omega^2}{2}\,, \\ k''(c^2\,A_2 - a^2\,C_2) + k''(3\,c^2\,C_1 - a^2\,B_2) &= \frac{c^2\,\omega^2}{2}\,, \end{aligned}$$

due equazioni le quali determinano k', k''. Queste equazioni possono anche scriversi:

$$(20)\quad \begin{aligned} k'\int_0^\infty \frac{2\,b^2(a^2+s)+s(b^2-a^2)}{(a^2+s)(b^2+s)^2\sqrt{R}}\,ds + k'(b^2-a^2)\int_0^\infty \frac{s\,.\,ds}{R^{\frac{3}{2}}} &= \frac{b^2\omega^2}{2}\,, \\ k'(c^2-a^2)\int_0^\infty \frac{s\,.\,ds}{R^{\frac{3}{2}}} + k''\int_0^\infty \frac{2\,c^2(a^2+s)+s(c^2-a^2)}{(a^2+s)(c^2+s)^2\sqrt{R}}\,ds &= \frac{c^2\omega^2}{2}\,, \end{aligned}$$

e sotto questa forma si prestano assai bene al calcolo di k', k'' quando l'ellissoide è poco differente da una sfera. Il determinante delle (19) o delle (20) è generalmente diverso da zero; e si può dimostrare che esso è sempre > 0 quando l'asse a, attorno al quale ha luogo la rotazione, sia il più piccolo dei tre.

« § 5. Se indichiamo con M la massa terrestre e se ammettiamo che l'ellissoide S sia superficie d'equilibrio (esteriore), il potenziale dell'attrazione terrestre sarà dunque espresso dalle (12), dove k', k'' sono determinate dalle equazioni (19) o dalle (20).

« Le componenti della gravità nel punto $(x\,y\,z)$, cangiate di segno, si valuteranno colle formole

$$X = -f\frac{\partial V}{\partial x}\,, \qquad Y = -f\frac{\partial V}{\partial y} - \omega^2\,y\,,$$
$$Z = -f\frac{\partial V}{\partial z} - \omega^2\,z\,.$$

« Eseguendo le derivazioni e ponendo nei risultati $\lambda = 0$, abbiamo le componenti della gravità in un punto dell'ellissoide S:

$$(21)\quad \begin{aligned} X_0 &= \frac{M f x}{a^2\,q} + 2\,x\,k'\,C_2 + 2\,x\,k''\,B_2 - \frac{4\,k'\,x\,y^2}{a^2\,b^4\,q} - \frac{4\,k''x\,z^2}{a^2\,c^4\,q} \\ Y_0 &= \frac{M f y}{b^2\,q} + 6\,y\,k'\,B_1 + 2\,y\,k''\,A_2 - \frac{4\,k'\,y^3}{b^6\,q} - \frac{4\,k''\,z^2\,y}{b^2\,c^4\,q} - \omega^2\,y\,, \\ Z_0 &= \frac{M f z}{c^2 q} + 2\,z\,k'\,A_2 + 6\,z\,k''\,C_1 - \frac{4\,k'\,z\,y^2}{b^4\,c^2\,q} - \frac{4\,k''\,z^3}{c^6 q} - \omega^2\,z\,, \end{aligned}$$

dove:

$$q = a\,b\,c\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right).$$

In particolare, chiamando G_1, G_2, G_3 i valori di G alle estremità degli assi $2a$, $2b$, $2c$, avremo:

$$(22)\quad \begin{cases} G_1 = \dfrac{fM}{b\,c} + 2\,a\,k'\,C_2 + 2\,a\,k''\,B_2\,, \\[2ex] G_2 = \dfrac{fM}{a\,c} + 6\,b\,k'\,B_1 + 2\,b\,k''\,A_2 - \dfrac{4\,k'}{a\,b^2\,c} - \omega^2\,b\,, \\[2ex] G_3 = \dfrac{fM}{a\,b} + 2\,c\,k'\,A_2 + 6\,c\,k''\,C_1 - \dfrac{4\,k''}{a\,b\,c^2} - \omega^2\,c\,. \end{cases}$$

Da queste, tenendo conto delle (18) (19), si deduce facilmente

$$b\,G_2 - a\,G_1 = \frac{fM}{a\,b\,c}\,(b^2 - a^2) - \frac{4\,k'}{a\,b\,c}$$

$$c\,G_3 - a\,G_1 = \frac{fM}{a\,b\,c}\,(c^2 - a^2) - \frac{4\,k''}{a\,b\,c}$$

$$\frac{G_1}{a} + \frac{G_2}{b} + \frac{G_3}{c} = \frac{3\,fM}{a\,b\,c} - 2\,\omega^2\,,$$

ovvero, chiamando ϱ_m la densità media terrestre,

$$(23)\quad \frac{G_1}{a} + \frac{G_2}{b} + \frac{G_3}{c} = 4\,\pi\,f\,\varrho_m - 2\,\omega^2\,.$$

« Questa formola, notevole per la sua semplicità, può anche scriversi in altro modo. Il sig. Poincaré ha dimostrato che se una massa *omogenea* di densità ϱ e massa M ruota con velocità angolare ω attorno ad un asse, e se la sua superficie esterna S è di *equilibrio*, si deve avere:

$$(24)\quad \int_S G\,d\sigma = (2\,\pi\,f\,\varrho - \omega^2)\,\frac{2M}{\varrho}\,,$$

dove G è la gravità alla superficie, contata positivamente quando è diretta verso l'interno, e l'integrale è esteso alla superficie S. Ora è facilissimo verificare che la (24) sta anche pel caso di una massa *eterogenea*, purchè in luogo di ϱ si ponga la densità media ϱ_m ossia il rapporto fra la massa M e il volume racchiuso dalla superficie S. Chiamando W il volume del nostro ellissoide, avremo dunque:

$$\int G\,d\sigma = (2\,\pi\,f\,\varrho_m - \omega^2)\,2\,W,$$

e quindi la (23) potrà mettersi sotto la forma

$$\frac{1}{W}\int G\,d\sigma = \frac{G_1}{a} + \frac{G_2}{b} + \frac{G_3}{c}\,,$$

dove l'integrazione va estesa sulla superficie dell'ellissoide.

« § 6. Daremo, da ultimo, le formole approssimate relative al caso di un ellissoide poco diverso dalla sfera, e nel quale l'asse più piccolo sia quello attorno al quale si compie la rotazione. Posto:

$$b^2 = a^2 (1 + \varepsilon) \qquad c^2 = a^2 (1 + \eta)$$

e sviluppando in serie rispetto ad ε, η le funzioni sotto il segno integrale nelle equazioni (20), le integrazioni si eseguiscono senza alcuna difficoltà. Risolvendo poi le equazioni stesse rispetto a k', k'', si ha:

$$k' = \frac{5}{8}\,\omega^2 a^5 \left(1 + \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{5}{14}\eta + \ldots\right)$$

$$k'' = \frac{5}{8}\,\omega^2 a^5 \left(1 + \frac{5}{14}\varepsilon + \frac{3}{2}\eta + \ldots\right).$$

Si ha poi, mediante lo sviluppo in serie:

$$\mathrm{B}_1 . a^5 = \frac{2}{5} - \frac{5\varepsilon + \eta}{7} + \ldots, \quad \mathrm{C}_1 . a^5 = \frac{2}{5} - \frac{\varepsilon + 5\eta}{7} + \ldots$$

$$\mathrm{A}_2 . a^5 = \frac{2}{5} - \frac{3\varepsilon + 3\eta}{7} + \ldots, \quad \mathrm{B}_2 . a^5 = \frac{2}{5} - \frac{\varepsilon + 3\eta}{7} + \ldots$$

$$\mathrm{C}_2 . a^5 = \frac{2}{5} - \frac{3\varepsilon + \eta}{7} + \ldots,$$

E sostituendo nelle (21) si ottiene:

$$\frac{a^2\,\mathrm{X}_0}{x} = \frac{b^2\,\mathrm{Y}_0}{y} = \frac{c^2\,\mathrm{Z}_0}{z} = \frac{\mathrm{M}f}{q} + \omega^2 a^2 \left(1 + \frac{3}{14}\varepsilon + \frac{3}{14}\eta + \ldots\right) - \tag{25}$$

$$- \frac{4k'y^2}{b^4 q} - \frac{4k''z^2}{c^4 q}.$$

Posto:

$$\mathrm{P}_0{}^2 = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{q}{abc}$$

avremo

$$\mathrm{G} = \frac{a^2\,\mathrm{P}_0}{x}\,\mathrm{X}_0\,.$$

E, valendoci della (25) dove sostituiremo per k', k'', b, c le loro espressioni in funzione di ω, a, ε, η, e per P_0 lo sviluppo

$$\mathrm{P}_0 = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\frac{y^2}{a^2} - \frac{\eta}{2}\frac{z^2}{a^4} + \ldots\right),$$

otteniamo finalmente:

$$\begin{aligned} \mathrm{G} = {} & \frac{\mathrm{M}f}{abc.\mathrm{P}_0} + \omega^2 a \left(1 - \frac{5}{2}\frac{y^2 + z^2}{a^2}\right) + \\ & + \omega^2 a\,\varepsilon \left(\frac{3}{14} + \frac{2y^2}{a^2} + \frac{5}{14}\frac{z^2}{a^2} - \frac{5}{4}\frac{(y^2 + z^2)\,y^2}{a^4}\right) + \\ & + \omega^2 a\,\eta \left(\frac{3}{14} + \frac{2z^2}{a^2} + \frac{5}{14}\frac{y^2}{a^2} - \frac{5}{4}\frac{(y^2 + z^2)\,z^2}{a^4}\right) + \ldots \end{aligned} \tag{26}$$

« Questa formola gode della stessa approssimazione che la (19′) della Nota 1ª. Per ricavare dalla (26) la (19′), bisogna nella (26) porre ε^2 in luogo di ε e di η, per y, z porre le espressioni (15) opportunamente sviluppate in serie, e in luogo di a mettere $b\left(1-\frac{\varepsilon}{2}+\dots\right)$ ».

Fisica-matematica. — *Sulla legge di razionalità rispetto alle proprietà elastiche dei cristalli.* Nota di Carlo Somigliana, presentata dal Socio Beltrami.

« La legge cristallografica così detta *di razionalità degli indici* può essere giustificata *a priori* mediante la ipotesi di una distribuzione regolare delle molecole nello spazio occupato dal cristallo, come si fa nelle moderne teorie di struttura.

« Nella teoria della elasticità essa fu finora ammessa come un postulato; così procedette Minnigerode (1) per trovare le diverse forme assegnabili al potenziale delle forze elastiche, così Voigt (2), Liebisch (3) e Love (4) che seguirono sostanzialmente lo stesso metodo di Minnigerode.

« Ora un esame più accurato conduce invece a concludere che la legge di razionalità, per quanto concerne le proprietà elastiche, può essere dedotta, senza alcuna altra ipotesi, dai principî della ordinaria teoria della elasticità, la quale può perciò essere liberata da un tale postulato. Di fatti in questa Nota dimostrerò che *un asse di simmetria elastica, il cui periodo non sia* 2, 3 *o* 4 *non differisce da un asse di isotropia.*

« Questa proposizione contiene la legge di razionalità, sotto una forma, anzi, più ristretta della ordinaria, in quanto esclude la possibilità di un asse a periodo 6, distinto da un asse di isotropia. Ciò del resto si accorda coi risultati cui sono giunti i cristallografi, i quali, nel determinare la forma del potenziale corrispondente ad un asse a periodo 6, trovarono appunto quella appartenente ad un asse di isotropia (Love, l. c. pag. 88).

« Se indichiamo, come di solito, con x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y e x'_x, y'_y, z'_z, y'_z, z'_x, x'_y le componenti di deformazione di un cristallo riferite a due terne di assi ortogonali, le formole che servono a passare dall'uno all'altro sistema di componenti sono lineari, omogenee, ed è facile porle sotto la forma di una sostituzione ortogonale a sei variabili. Difatti l'esistenza dell'invariante di deformazione

$$(1) \qquad x_x^2+y_y^2+z_z^2+\frac{1}{2}\,y_z^2+\frac{1}{2}\,z_x^2+\frac{1}{2}\,x_y^2$$

(1) Nachrichten von der K. Gesell. der Wiss. zu Göttingen, 1884.
(2) Abhandlungen id. id. 1887.
(3) *Physikalische Krystallographie*, Leipzig, 1891.
(4) *A treatise on the the mathematical theory of elasticity*, V. I, Cambridge, 1892.