ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° Semestre

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

« Questa formola gode della stessa approssimazione che la (19′) della Nota 1ª. Per ricavare dalla (26) la (19′), bisogna nella (26) porre ε^2 in luogo di ε e di η, per y, z porre le espressioni (15) opportunamente sviluppate in serie, e in luogo di a mettere $b\left(1-\frac{\varepsilon}{2}+\dots\right)$ ».

Fisica-matematica. — *Sulla legge di razionalità rispetto alle proprietà elastiche dei cristalli.* Nota di CARLO SOMIGLIANA, presentata dal Socio BELTRAMI.

« La legge cristallografica così detta *di razionalità degli indici* può essere giustificata *a priori* mediante la ipotesi di una distribuzione regolare delle molecole nello spazio occupato dal cristallo, come si fa nelle moderne teorie di struttura.

« Nella teoria della elasticità essa fu finora ammessa come un postulato; così procedette Minnigerode (1) per trovare le diverse forme assegnabili al potenziale delle forze elastiche, così Voigt (2), Liebisch (3) e Love (4) che seguirono sostanzialmente lo stesso metodo di Minnigerode.

« Ora un esame più accurato conduce invece a concludere che la legge di razionalità, per quanto concerne le proprietà elastiche, può essere dedotta, senza alcuna altra ipotesi, dai principî della ordinaria teoria della elasticità, la quale può perciò essere liberata da un tale postulato. Di fatti in questa Nota dimostrerò che *un asse di simmetria elastica, il cui periodo non sia* 2, 3 *o* 4 *non differisce da un asse di isotropia.*

« Questa proposizione contiene la legge di razionalità, sotto una forma, anzi, più ristretta della ordinaria, in quanto esclude la possibilità di un asse a periodo 6, distinto da un asse di isotropia. Ciò del resto si accorda coi risultati cui sono giunti i cristallografi, i quali, nel determinare la forma del potenziale corrispondente ad un asse a periodo 6, trovarono appunto quella appartenente ad un asse di isotropia (Love, l. c. pag. 88).

« Se indichiamo, come di solito, con $x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y$ e $x'_x, y'_y, z'_z, y'_z, z'_x, x'_y$ le componenti di deformazione di un cristallo riferite a due terne di assi ortogonali, le formole che servono a passare dall'uno all'altro sistema di componenti sono lineari, omogenee, ed è facile porle sotto la forma di una sostituzione ortogonale a sei variabili. Difatti l'esistenza dell'invariante di deformazione

$$(1) \qquad x_x^2+y_y^2+z_z^2+\frac{1}{2}y_z^2+\frac{1}{2}z_x^2+\frac{1}{2}x_y^2$$

(1) Nachrichten von der K. Gesell. der Wiss. zu Göttingen, 1884.
(2) Abhandlungen id. id. 1887.
(3) *Physikalische Krystallographie*, Leipzig, 1891.
(4) *A treatise on the the mathematical theory of elasticity*, V. I, Cambridge, 1892.

ci dice immediatamente che tale deve essere la sostituzione per le variabili $x_x, y_y, z_z, \frac{1}{\sqrt{2}} y_z, \frac{1}{\sqrt{2}} z_x, \frac{1}{\sqrt{2}} x_y$.

« Noi non avremo bisogno di queste formole generali, bastandoci di cercare le condizioni per l'esistenza di un solo asse di simmetria. Supporremo che questo coincida coll'asse della z, e studieremo le variazioni prodotte nel potenziale d'elasticità dalla sostituzione

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= x' \cos\frac{2\pi}{n} - y' \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \\ y &= x' \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + y' \cos\frac{2\pi}{n} \\ z &= z' \end{aligned}$$

che corrisponde alla rotazione di un angolo $\frac{2\pi}{n}$ attorno all'asse delle z; sarà allora n il periodo dell'asse di simmetria. Per avere la sostituzione che lega fra loro le componenti di deformazione riferite ai due sistemi di assi, basta osservare che tra le componenti di spostamento u, v, w e u', v', w' esistono relazioni simili alle (2), e così pure tra i simboli di derivazione; cioè si ha

$$\begin{aligned} D_x &= D_{x'} \cos\frac{2\pi}{n} - D_{y'} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \qquad & u &= u' \cos\frac{2\pi}{n} - v' \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \\ D_y &= D_{x'} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + D_{y'} \cos\frac{2\pi}{n} & v &= u' \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + v' \cos\frac{2\pi}{n} \\ D_z &= D_{z'} & w &= w'. \end{aligned}$$

Perciò ricordando che

$$x_x = D_x u \qquad y_y = D_y v \qquad z_z = D_z u$$
$$y_z = D_z v + D_y w \qquad z_x = D_x w + D_z u \qquad x_y = D_y u + D_x v$$

si trova

$$(3) \quad \begin{cases} \alpha) \begin{cases} x_x = x'_x \cos^2\frac{2\pi}{n} + y'_y \operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{n} - \frac{1}{\sqrt{2}} x'_y \,.\, \sqrt{2} \cos\frac{2\pi}{n} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \\ y_y = x'_x \operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{n} + y'_y \cos^2\frac{2\pi}{n} + \frac{1}{\sqrt{2}} x'_y \,.\, \sqrt{2} \cos\frac{2\pi}{n} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} x_y = (x'_x - y'_y)\sqrt{2} \cos\frac{2\pi}{n} \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + \frac{1}{\sqrt{2}} x'_y \left(\cos^2\frac{2\pi}{n} - \operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{n}\right) \end{cases} \\ \beta) \quad z_z = z'_z \\ \gamma) \begin{cases} y_z = y'_z \cos\frac{2\pi}{n} + z'_x \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \\ z_x = -y'_z \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + z'_x \cos\frac{2\pi}{n} \end{cases} \end{cases}$$

« Questa sostituzione si decompone in tre sostituzioni ortogonali (α), (β), (γ) di tre, una e due variabili rispettivamente; perciò se il potenziale di elasticità

$$\begin{aligned} 2\Pi = c_{11}\, x_x^2 + 2c_{12}\, x_x\, y_y + \cdots\cdots & \quad \cdots\cdots + 2c_{16}\, x_x\, x_y \\ + c_{22}\, y_y^2 + \cdots\cdots & \quad \cdots\cdots + 2c_{26}\, y_y\, x_y \\ + \cdots\cdots & \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \quad + c_{66}\, x_y^2 \end{aligned}$$

rimane immutato di forma quando si eseguisce la sostituzione precedente, esso potrà essere decomposto nelle sei forme quadratiche seguenti, ciascuna delle quali, separatamente, dovrà essere un invariante della sostituzione (3):

$$\begin{aligned} 2\Pi_1 &= c_{11}\, x_x^2 + c_{22}\, y_y^2 + c_{66}\, y_y^2 + 2c_{26}\, y_y\, x_y + 2c_{16}\, x_x\, x_y + 2c_{12}\, x_x\, y_y \\ 2\Pi_2 &= c_{33}\, z_z^2 \\ 2\Pi_3 &= c_{44}\, y_z^2 + c_{55}\, z_x^2 + 2c_{45}\, y_z\, z_x \\ \Pi_4 &= z_z\,(c_{13}\, x_x + c_{23}\, y_y + c_{36}\, x_y) \\ \Pi_5 &= z_z\,(c_{34}\, y_z + c_{35}\, z_x) \\ \Pi_6 &= x_x\,(c_{14}\, y_z + c_{15}\, z_x) + y_y\,(c_{24}\, y_z + c_{25}\, z_x) + x_y\,(c_{46}\, y_z + c_{56}\, z_x). \end{aligned}$$

« Noi dovremo quindi cercare quei valori di n pei quali è possibile determinare le costanti c_{ik} in modo che queste sei espressioni risultino invarianti.

« Intanto osserviamo che dalle (3) appare che, qualunque sia la grandezza dell'angolo $\frac{2\pi}{n}$, sono invarianti le espressioni

$$x_x + y_y\,,\ z_z$$

e, a cagione dell'ortogonalità delle sostituzioni (α) (γ), anche

$$x_x^2 + y_y^2 + \frac{1}{2}\, x_y^2\,,\quad \frac{1}{2}\,(y_z^2 + z_x^2)$$

(che sommate con z_z^2 danno l' invariante (1)). Quindi esisteranno in qualunque caso gli invarianti quadratici

$$x_x^2 + y_y^2 + \frac{1}{2}\, x_y^2\,,\quad (x_x + y_y)^2,\ z_z^2,\quad y_z^2 + z_x^2,\ (x_x + y_y)\, z_z\,,$$

al secondo dei quali si può anche sostituire: $2x_x y_y - \frac{1}{2}\, x_y^2$, che è una combinazione lineare dei primi due. Vedremo che questi sono i soli invarianti indipendenti dalla grandezza dell'angolo di rotazione e che perciò il potenziale, quando l'asse delle z è asse di isotropia, è una funzione lineare di queste cinque espressioni.

« Essendo z_z invariante, tali dovranno essere anche le espressioni lineari

$$\Pi'_4 = c_{13}\, x_x + c_{23}\, y_y + c_{36}\, x_y \qquad \Pi'_5 = c_{34}\, y_z + c_{35}\, z_x$$

per cui la quistione si riduce a cercare le condizioni di esistenza di questi due invarianti lineari, e dei tre quadratici Π_1, Π_3, Π_6, essendo inutile occuparci di Π_2.

« La ricerca degli invarianti [1] lineari di una sostituzione lineare si riduce a quella dei punti uniti della sostituzione stessa. Difatti se per una sostituzione

$$x_i = \sum_{h=1}^{m} a_{ih}\, y_h \qquad (i = 1, 2, \dots m)$$

si ha identicamente

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{A}_i\, x_i = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{A}_i\, y_i$$

devono essere soddisfatte le m equazioni

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{A}_i\, a_{ih} = \mathrm{A}_h \qquad (h = 1, 2, \dots m)$$

che sono appnnto quelle che determinano le coordinate $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \dots \mathrm{A}_n$ dei punti uniti differenti dal punto $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$.

« Inoltre, nel caso delle sostituzioni ortogonali, la ricerca degli invarianti quadratici può ridursi a quella degli invarianti lineari di una sostituzione ortogonale. Difatti se si ha

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \sum_{i=1}^{m} y_i^2$$

si ha anche

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i^2)^2 + \sum_{ih} (\sqrt{2} x_i\, x_h)^2 = \sum_{i=1}^{m} (y_i^2)^2 + \sum_{ih} (\sqrt{2} y_i\, y_h)^2$$

e perciò la trasformazione di una forma quadratica può effettuarsi mediante una sostituzione lineare *ortogonale* sulle $\dfrac{m(m+1)}{2}$ variabili

$$x_1^2,\ x_2^2, \dots x_m^2,\ \sqrt{2}\, x_1\, x_2, \dots, \sqrt{2}\, x_{m-1}\, x_m .$$

« Come si vedrà in seguito, noi potremo ridurre il nostro problema alla ricerca degli invarianti lineari di sostituzioni ortogonali di due e tre variabili, a determinante positivo. Riguardo a queste, ricordandone il significato cinematico, si trova subito:

1° Una sostituzione ortogonale di due variabili, a determinante positivo, non ammette in generale alcun invariante lineare; solo quando si riduce alla sostituzione identica ammette, come invarianti, le *due* variabili;

2° Una sostituzione ortogonale di tre variabili a determinante positivo ammette sempre *un* invariante lineare; ne ammette *tre*, le variabili stesse, quando si riduce alla sostituzione identica.

(1) Ho conservato la denominazione di *invarianti*, quantunque fosse forse più propria quella di *covarianti*, poichè non avrò mai bisogno di considerare altre espressioni invariantive, e non può quindi nascere ambiguità.

« Questi teoremi del resto sono conseguenze immediate di teoremi algebrici generali noti (Baltzer, *Theorie... der Determinanten*, Vte Auflage, s. 201)

Invarianti Π_3, Π'_4, Π'_5.

« La sostituzione (3, γ) che serve a trasformare Π'_5 non può ridursi alla sostituzione identica per alcun valore di n differente dall'unità; quindi Π'_5 non potrà essere invariante se non si annulla identicamente. *In ogni caso perciò dovrà essere* $\Pi'_5 = 0$, *ossia*

$$c_{34} = 0 \qquad c_{35} = 0.$$

« La sostituzione (3, α) che trasforma Π'_4 può essere ridotta alla forma canonica delle sostituzioni ortogonali positive di tre variabili osservando che si ha

$$(4) \qquad \begin{aligned} x_x - y_y &= (x'_x - y'_y) \cos \frac{4\pi}{n} - x'_y \operatorname{sen} \frac{4\pi}{n} \\ x_y &= (x'_x - y'_y) \operatorname{sen} \frac{4\pi}{n} + x'_y \cos \frac{4\pi}{n} \\ x_x + y_y &= x'_x + y'_y \end{aligned}$$

« Il suo invariante è quindi, come già si è visto,

$$x_x + y_y$$

e non si può ridurre alla sostituzione identica che per $n = 2$. Dunque:

« Per $n = 2$ la forma Π'_4 è invariante, qualunque ne siano i coefficienti c_{13}, c_{23}, c_{36}.

« Per $n > 2$ dovrà essere invece

$$c_{13} = c_{23} \qquad c_{36} = 0.$$

« La sostituzione lineare per le variabili y_z^2, z_x^2, $\sqrt{2}\, y_z z_x$ che si deduce dalla sostituzione (3, γ) è della stessa forma della (3, α) e quindi può ridursi alla forma della (4). Abbiamo quindi:

« Per $n = 2$ la forma Π_3 è invariante qualunque ne siano i coefficienti c_{44}, c_{55}, c_{45}.

« Per $n > 2$ dovrà essere invece

$$c_{44} = c_{55} \qquad c_{45} = 0.$$

Invariante Π_1.

« Per ottenere la sostituzione lineare di sei variabili che trasforma Π_1 ci serviremo della sostituzione (3, α) ridotta alla forma canonica (4). Posto

$$\begin{aligned} y_1 &= (x_x + y_y)^2 & y_4 &= \sqrt{2}\,(x_x - y_y)\, x_y \\ y_2 &= (x_x - y_y)^2 & y_5 &= \sqrt{2}\,(x_x + y_y)\, x_y \\ y_3 &= x_y^2 & y_6 &= \sqrt{2}\,(x_x^2 - y_y^2) \end{aligned}$$

la sostituzione per queste variabili y, che possono essere considerate invece delle $x_x^2, y_y^2, \ldots, x_x y_y$ che compaiono in Π_1, è la seguente

$$\delta)\left\{\; y_1 = y'_1\right.$$

$$\varepsilon)\left\{\begin{aligned} y_2 &= y'_2 \cos^2\frac{4\pi}{n} + y'_3 \operatorname{sen}^2\frac{4\pi}{n} - y'_4\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} \\ y_3 &= y'_2 \operatorname{sen}^2\frac{4\pi}{n} + y'_3\cos^2\frac{4\pi}{n} + y'_4\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} \\ y_4 &= (y'_2 - y'_3)\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{n}\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + y'_4\left(\cos^2\frac{4\pi}{n} - \operatorname{sen}^2\frac{4\pi}{n}\right)\end{aligned}\right.$$

$$\zeta)\left\{\begin{aligned} y_5 &= y'_5\cos\frac{4\pi}{n} + y'_6\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} \\ y_6 &= -y'_5\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + y'_6\cos\frac{4\pi}{n}\,.\end{aligned}\right.$$

Questa sostituzione si decompone in tre sostituzioni ortogonali di una, due e tre variabili rispettivamente, in modo simile alla sostituzione (3). Quindi la ricerca dei suoi invarianti si può fare anche in questo caso mediante i due teoremi già invocati.

« La sostituzione (δ) ammette, qualunque sia n, l'invariante

$$y_1 = (x_x + y_y)^2.$$

« La sostituzione (ε) ammette in generale soltanto l'invariante

$$y_2 + y_3 = (x_x - y_y)^2 + x_y^2.$$

« Però, come si vede immediatamente riducendola alla forma canonica, vi sono due casi, in cui essa si riduce alla sostituzione identica, quando $n = 2$ od $n = 4$. Per questi valori di n, ammetterà i tre invarianti

$$y_2 = (x_x - y_y)^2 \qquad y_3 = x_y^2 \qquad y_4 = \sqrt{2}\,(x_x - y_y)\,x_y.$$

« Finalmente la sostituzione (ζ) non ammette in generale alcun invariante, e solo si riduce alla sostituzione identica per $n = 2$. In questo caso avrà i due invarianti

$$y_5 = \sqrt{2}\,(x_x + y_y)\,x_y \qquad\qquad y_6 = \sqrt{2}\,(x_x^2 - y_y^2).$$

« Vediamo ora quali condizioni ne derivano per i coefficienti di Π_1 nei tre casi che, come si è visto, basterà di considerare, cioè $n = 2$, $n = 4$ ed n differente da 2 e da 4.

« 1° *Per* $n = 2$ tutte le sei variabili sono invarianti, quindi tale sarà pure Π_1 qualunque ne siano i coefficienti.

« 2° *Per* $n = 4$ si hanno quattro invarianti y_1, y_2, y_3, y_4, a cui possiamo sostituire i seguenti che ne sono funzioni lineari

$$x_x^2 + y_y^2,\ x_x y_y,\ x_y^2,\ (x_x - y_y)\,x_y.$$

« Dovrà allora Π_1 essere funzione di queste quattro espressioni, quindi fra i suoi coefficienti dovranno esistere le relazioni

$$c_{11} = c_{22} \qquad\qquad c_{16} = -c_{26}\,.$$

« 3° *Per* $n \neq 2, 4$ si hanno due soli invarianti, y_1 ed $y_2 + y_3$, ai quali possiamo sostituire i seguenti

$$x_x^2 + y_y^2 + \frac{1}{2} x_y^2 \qquad 2 x_x y_y - \frac{1}{2} x_y^2 .$$

Perchè Π_1 sia funzione di queste due espressioni si devono avere le relazioni

$$c_{11} = c_{22} \qquad c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}) \qquad c_{16} = 0 \qquad c_{26} = 0 .$$

« Ora noi abbiamo già osservato che i due invarianti precedenti esistono anche quando l'asse del z è un asse di isotropia; dunque per n differente da 2 e da 4 la Π_1 non può essere invariante che sotto la forma che assume quando l'asse di simmetria è asse di isotropia.

Invariante Π_6.

« La sostituzione lineare che trasforma Π_6 si ottiene dalle sostituzioni $(3, \alpha, \gamma)$. Prenderemo la $(3, \alpha)$ sotto la forma canonica (4), e ponendo

$$\begin{array}{lll} z_1 = (x_x + y_y)\, y_z & z_3 = (x_x - y_y)\, y_z & z_5 = x_y\, y_z \\ z_2 = (x_x + y_y)\, z_x & z_4 = (x_x - y_y)\, z_x & z_6 = x_y\, z_x \end{array}$$

troviamo

$$\eta) \begin{cases} z_1 = \quad z'_1 \cos\frac{2\pi}{n} + z'_2 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2} \\ z_2 = -z'_1 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + z'_2 \cos\frac{2\pi}{n} \end{cases}$$

$$\vartheta) \begin{cases} z_3 = \left(\quad z'_3 \cos\frac{2\pi}{n} + z'_4 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\right)\cos\frac{4\pi}{n} - \left(z'_5 \cos\frac{2\pi}{n} + z'_6 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\right)\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} \\ z_4 = \left(-z'_3 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + z'_4 \cos\frac{2\pi}{n}\right)\cos\frac{4\pi}{n} + \left(z'_5 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} - z'_6 \cos\frac{2\pi}{n}\right)\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} \\ z_5 = \left(\quad z'_3 \cos\frac{2\pi}{n} + z'_4 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\right)\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} + \left(z'_5 \cos\frac{2\pi}{n} + z'_6 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}\right)\cos\frac{4\pi}{n} \\ z_6 = \left(-z'_3 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} + z'_4 \cos\frac{2\pi}{n}\right)\operatorname{sen}\frac{4\pi}{n} - \left(z'_5 \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} - z'_6 \cos\frac{2\pi}{n}\right)\cos\frac{4\pi}{n} . \end{cases}$$

« Questa sostituzione si spezza in due sostituzioni ortogonali, l'una (η) di due variabili, l'altra (ϑ) di quattro. Però anche quest'ultima si può decomporre facilmente in due sostituzioni di due variabili. Si ha infatti dalle formole precedenti

$$\vartheta') \begin{cases} z_3 + z_6 = \quad (z'_3 + z'_6)\cos\frac{6\pi}{n} + (z'_4 - z'_5)\operatorname{sen}\frac{6\pi}{n} \\ z_4 - z_5 = -(z'_3 + z'_6)\operatorname{sen}\frac{6\pi}{n} + (z'_4 - z'_5)\cos\frac{6\pi}{n} \end{cases}$$

e similmente

$$\vartheta'')\qquad \begin{aligned} z_3 - z_6 &= (z'_3 - z'_6)\cos\frac{2\pi}{n} - (z'_4 + z'_5)\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n} \\ z_4 + z_5 &= (z'_3 - z'_6)\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n} + (z'_4 + z'_5)\cos\frac{2\pi}{n}\,. \end{aligned}$$

« Per cui possiamo dire che la trasformazione di Π_6 si può effettuare mediante tre sostituzioni ortogonali (η), (ϑ'), (ϑ'') di due variabili, a determinante positivo.

« In generale nessuna di queste sostituzioni ammette invarianti lineari; soltanto la (ϑ') si può ridurre alla sostituzione identica per $n = 3$. In questo caso esisteranno gli invarianti

$$z_3 + z_6 = (x_x - y_y)\,y_z + x_y\,z_x$$
$$z_4 - z_5 = (x_x - y_y)\,z_x - x_y\,y_z\,.$$

« Dunque: se si esclude il caso che sia $n = 3$, la Π_6 non potrà mai essere invariante, se non è identicamente nulla.

« Per $n = 3$ la Π_6 dovrà essere funzione delle due espressioni invarianti precedenti, e perciò dovranno fra i suoi coefficienti esistere le relazioni

$$c_{14} + c_{24} = 0 \qquad c_{14} - c_{56} = 0$$
$$c_{15} + c_{25} = 0 \qquad c_{25} - c_{46} = 0.$$

« Riassumendo i risultati cui siamo arrivati, troviamo che, qualunque siano le proprietà di simmetria dell'asse, si ha sempre

$$2\Pi_2 = c_{33}\,z_z^2 \qquad \Pi_5 = 0.$$

« Inoltre Π_1, Π_3, Π_4, Π_6 saranno invarianti se:

per $n = 2$:

$$2\Pi_1 = c_{11}\,x_x^2 + c_{22}\,y_y^2 + c_{66}\,x_y^2 + 2c_{26}\,y_y\,x_y + 2c_{16}\,x_x\,x_y + 2c_{12}\,x_x\,y_y$$
$$2\Pi_3 = c_{44}\,y_z^2 + c_{55}\,z_x^2 + 2c_{45}\,y_z\,z_x$$
$$\Pi_4 = z_z\,(c_{13}\,x_x + c_{23}\,y_y + c_{36}\,x_y)$$
$$\Pi_6 = 0$$

per $n = 3$:

$$2\Pi_1 = c_{11}\left(x_x^2 + y_y^2 + \frac{1}{2}\,x_y^2\right) + c_{12}\left(2x_x\,y_y - \frac{1}{2}\,x_y^2\right)$$
$$2\Pi_3 = c_{44}\,(y_y^2 + z_x^2)$$
$$\Pi_4 = c_{13}\,z_z\,(x_x + y_y)$$
$$\Pi_6 = c_{14}\left[(x_x - y_y)\,y_z + x_y\,z_x\right] - c_{25}\left[(x_x - y_y)\,z_x - x_y\,y_z\right]$$

per $n = 4$:

$$2\Pi_1 = c_{11}\,(x_x^2 + y_y^2) + 2c_{12}\,x_x\,y_y + 2c_{16}\,(x_x - y_y)\,x_y + c_{66}\,x_y^2$$
$$2\Pi_3 = c_{44}\,(y_z^2 + z_x^2)$$
$$\Pi_4 = c_{13}\,(x_x + y_y)\,z_z$$
$$\Pi_6 = 0$$

per $n > 4$ e per l'isotropia uniasssiale:

$$2\Pi_1 = c_{11}\left(x_x^2 + y_y^2 + \frac{1}{2}x_y^2\right) + c_{12}\left(2x_x y_y - \frac{1}{2}x_y^2\right)$$

$$2\Pi_3 = c_{44}(y_z^2 + z_x^2)$$

$$\Pi_4 = c_{13}(x_x + y_y)z_z$$

$$\Pi_6 = 0.$$

« Dunque i soli casi in cui il potenziale assume una forma differente da quella della isotropia uniassiale si hanno per $n = 2, 3, 4$. Ciò dimostra il teorema enunciato da principio.

« Le quattro forme ora trovate per il potenziale coincidono con quelle assegnate dai cristallografi a quelle classi cristalline che sono caratterizzate da un asse di simmetria a periodo 2, 3, 4, 6 ».

Fisica. — *Sulla distribuzione del magnetismo indotto nel ferro. — Sul magnetismo dei cilindri di ferro.* Note di M. Ascoli, presentate dal Socio Blaserna.

Queste due Note saranno pubblicate nei prossimi fascicoli.

Fisica terrestre. — *Velocità di propagazione delle principali scosse del terremoto di Zante a Catania.* Nota del prof. A. Riccò, presentata dal Socio Blaserna.

« Nell'Osservatorio Geodinamico di Catania le dette scosse furono registrate da un sismometrografo a striscia di carta continua sulla quale un cronometro di marina segna elettricamente le ore; nei tempi delle scosse ricavati da questo strumento vi può essere l'incertezza di alcuni secondi, in causa della brevità del tratto di circa $0^m,1$ percorso dalla striscia in un'ora, ed anche per cagione delle parallasse delle penne scriventi, inconveniente questo ora soppresso, adottando l'innovazione di segnare le ore, interrompendo per alcuni secondi le linee segnate dalle penne medesime, come ha ideato il dottor A. Cancani.

« Il tempo nell'Osservatorio di Catania si determina colla osservazione delle stelle o del sole collo strumento dei passaggi, quindi lo si ha esatto fino ad una frazione di secondo. Inoltre non di rado si osserva il mezzodì vero alla meridiana costruita da Peters e Waltershausen nell'attigua basilica di San Nicola: talchè si ha un controllo che non ammette la possibilità di un equivoco.