ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° SEMESTRE

ROMA
TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Seduta del 18 marzo 1894.

F. Brioschi Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla linea elastica.* Nota del dott. Orazio Tedone, presentata dal Socio Bianchi.

« 1. La lettura di quel paragrafo dell'ammirabile trattato dell'Halphen sulle funzioni ellittiche, il quale tratta della curva elastica gobba (1), mi ha suggerito alcune osservazioni che possono forse avere qualche interesse e che io riunisco in questa Nota.

« L'Halphen si propone di dimostrare il teorema di Kirchhoff sulla coincidenza delle equazioni che servono a trovare la curva elastica con quelle che servono a trovare il movimento di un corpo grave intorno ad un suo punto fisso. Egli dice fra l'altro: « La forme de la section du ressort joue ici le même rôle que, dans l'autre problème, la nature de l'ellipsoide d'inertie. Au corps grave de révolution suspendu par un point de son axe correspond le ressort à section circulaire ». Ciò premesso, invece di servirsi delle equazioni di Kirchhoff, si serve di quelle conosciute avanti il citato autore (2),

(1) 2° partie, pag. 142.

(2) Queste equazioni furono date da Lagrange (*Méc. anal.* T. I, pag. 143, édit. de Bert.); ma in esse l'autore considerava soltanto l'elasticità prodotta dalla flessione della curva e malgrado ciò riteneva che le sue equazioni non fossero in generale integrabili. Binet considerò anche la elasticità dovuta alla torsione (*Méc. anal.*. T. I, pag. 401, éd. de Bert.) ed integrò le equazioni così completate. Il suo metodo fu perfezionato da Wantzell in una Nota dei Compt. rend., T. XVIII.

per costruire le quali non si tien conto nè della forma della sezione piccolissima del filo, nè delle costanti della elasticità della materia di cui il filo può essere composto, o almeno la considerazione di questi elementi, nelle ultime equazioni, è molto imperfetta. Indi riporta il metodo d'integrazione di queste equazioni com'è esposto nel libro di Hermite, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*, e mostra che le espressioni di due delle coordinate di un punto della curva elastica coincidono con le espressioni di due delle componenti della rotazione di un corpo rigido, pesante, di rivoluzione, sospeso per un punto del suo asse di simmetria quando l'ellissoide d'inerzia, relativo al punto fisso, è una sfera; mentre la derivata dell'altra coordinata, rispetto all'arco della curva, ha la stessa espressione del coseno dell'angolo che la verticale forma con la retta che contiene il punto di sospensione e il baricentro.

« Ora questo risultato, se mostra una certa relazione fra il problema della linea elastica e quello del moto di un corpo rigido pesante intorno ad un suo punto fisso, non è il teorema di Kirchhoff, nè da esso risultano le analogie fra i due problemi che lo stesso autore cita.

« Il teorema di Kirchhoff constata fra i due problemi delle relazioni molto più generali e più intime che non appaia dal risultato di Halphen.

« Per mettere in chiaro la questione dobbiamo cominciare a determinare con precisione in che differiscono i due sistemi di equazioni della linea elastica o se uno può sostituirsi completamente all'altro.

« 2. Supponiamo che ξ, η, ζ sia un sistema di assi fissi nello spazio scelti in modo che l'asse ζ sia parallelo alla risultante delle tensioni che agiscono su ciascuna delle sezioni estreme del filo. che x, y, z sia un sistema di assi mobili tale che la sua origine sia un punto della curva formata dai baricentri delle diverse sezioni del filo, che per brevità chiamiamo linea elastica e che l'asse z si mantenga tangente a questa curva, mentre gli assi x, y coincidano con gli assi principali della sezione del filo prodotta dal piano $x\,y$. Supponiamo ancora che i coseni di direzione degli assi ξ, η, ζ rispetto agli assi x, y, z siano

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\,;\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3\,;\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$$

in modo che α, β, γ corrispondano a ξ, η, ζ e 1, 2, 3 a x, y, z. Le equazioni differenziali che servono a trovare la linea elastica, secondo la teoria di Kirchhoff, sono allora:

$$(1)\qquad \begin{cases} A_1 \dfrac{dp}{ds} = (A_2 - A_3)\, rq + \Gamma\gamma_2 \\ A_2 \dfrac{dq}{ds} = (A_3 - A_1)\, pr - \Gamma\gamma_1 \\ A_3 \dfrac{dr}{ds} = (A_1 - A_2)\, qp\ , \end{cases}$$

dove A_1, A_2, A_3 sono costanti dipendenti soltanto dalla forma della sezione del filo e dalle costanti dell'elasticità della materia di cui esso è costituito; Γ è la grandezza della risultante delle tensioni agenti su una sezione estrema del filo; s è l'arco della curva elastica, r la torsione e p, q le flessioni delle proiezioni della stessa curva sui piani $y\, z$ e $z\, x$.

« Nella forma delle equazioni (1) è contenuto il teorema di Kirchhoff. Le (1) rappresentano infatti il moto di un corpo rigido pesante di momenti d'inerzia A_1, A_2, A_3, quando s è proporzionale al tempo e s'interpretino convenientemente le altre quantità che in esse compaiono.

« Affinchè le (1) rappresentino le equazioni di equilibrio di un filo elastico è sufficiente che il potenziale elastico della materia, di cui il filo è costituito, si possa ridurre ad una somma di quadrati in p, q, r moltiplicati per certe costanti A_1, A_2, A_3. Perciò basta che il potenziale elastico di un elemento di materia abbia la forma:

$$f = a_{11}\, x_x^2 + a_{22}\, y_y^2 + a_{33}\, z_z^2 + a_{44}\, y_z^2\, a_{55}\, z_x^2 + a_{66}\, x_y^2 + \\ + 2\, a_{23}\, y_y\, z_z + 2\, a_{13}\, z_z\, x_x + 2\, a_{12}\, x_x\, y_y \text{ (1)},$$

dove $a_{11} \ldots a_{66}$, a_{23}, $\ldots a_{12}$ sono costanti e x_x, y_y, z_z; $y_z, \ldots$ dinotano le dilatazioni e gli scorrimenti individuanti la pura deformazione dell'elemento, secondo le notazioni usate da Kirchhoff.

« Alle equazioni (1) si può dare facilmente un'altra forma. Basta perciò moltiplicarle successivamente per α_1, α_2, α_3, poi per β_1, β_2, β_3 e finalmente per γ_1, γ_2, γ_3 e sommare ciascuna volta. Facendo uso delle formole di Poisson si trova:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{ds}(A_1 p\alpha_1 + A_2 q\alpha_2 + A_3 r\alpha_3) + \Gamma\beta_3 = 0 \\ &\frac{d}{ds}(A_1 p\beta_1 + A_2 q\beta_2 + A_3 r\beta_3) - \Gamma\alpha_3 = 0 \\ &\frac{d}{ds}(A_1 p\gamma_1 + A_2 q\gamma_2 + A_3 r\gamma_3) \qquad\;\; = 0\,. \end{aligned}\right.$$

« Osservando che $\alpha_3 = \frac{d\xi}{ds}$, $\beta_3 = \frac{d\eta}{ds}$, $\gamma_3 = \frac{d\zeta}{ds}$, le equazioni precedenti si possono integrare rispetto ad s e quindi danno:

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &A_1 p\alpha_1 + A_2 q\alpha_2 + A_3 r\alpha_3 + \Gamma\eta = c_1 \\ &A_1 p\beta_1 + A_2 q\beta_2 + A_3 r\beta_3 - \Gamma\xi = c_2 \\ &A_1 p\gamma_1 + A_2 q\gamma_2 + A_3 r\gamma_3 \qquad = c_3\,. \end{aligned}\right.$$

(1) Per convincersi di ciò, basta osservare che in questa ipotesi, salvo i valori delle costanti, si può trattare il problema di de Saint-Venant procedendo come nel Clebsch (*Théorie de l'élast.* ecc., pag. 136 dell'ediz. fran.), quindi si possono costruire le equazioni dell'equilibrio del filo come è indicato alla pag. 424 dello stesso libro.

c_1, c_2, c_3 sono costanti e rappresentano le componenti dell'asse momento della coppia delle tensioni agenti su una sezione estrema del filo rispetto agli assi ξ, η, ζ. Ciò risulta facilmente dal fatto che $A_1 p$, $A_2 q$, $A_3 r$ rappresentano le componenti dello stesso asse momento rispetto agli assi x, y, z.

« Supponiamo ora che la sezione del filo sia circolare, che la materia sia omogenea e che sia simmetrica riguardo alle sue proprietà elastiche rispetto alla linea dei baricentri. Allora è $A_1 = A_2$ e come risulta dalla 3ª delle (1) r è costante per cui tutte le curve corrispondenti a questa ipotesi sono a torsione costante. Inoltre poichè la posizione degli assi x e y nel loro piano diventa indeterminata, possiamo supporre che l'asse x, p. es. coincida con la normale principale della curva e quindi l'asse y con la binormale. In queste ipotesi è $p = 0$, $q = \frac{1}{\varrho}$, dove ϱ è il raggio di flessione della curva e per formole note di geometria differenziale:

$$\alpha_2 q = \frac{d\eta}{ds}\frac{d^2\zeta}{ds_2} - \frac{d\zeta}{ds}\frac{d^2\eta}{di}\,, \quad \beta_2 q = \frac{d\zeta}{ds}\frac{d^2\xi}{ds^2} - \frac{d\xi}{ds}\frac{d^2\zeta}{ds^2}\,,$$

$$\gamma_2 r = \frac{d\xi}{ds}\frac{d^2\eta}{ds^2} - \frac{d\eta}{ds}\frac{d^2\xi}{ds^2} \text{ (1)}.$$

« Le (3) diventano quindi:

$$(4) \quad \begin{cases} A_1\left(\frac{d\eta}{ds}\frac{d^2\zeta}{ds^2} - \frac{d\zeta}{ds}\frac{d^2\eta}{ds^2}\right) + A_3 r \,.\, \frac{d\xi}{ds} + \Gamma\eta = c_1 \\ A_1\left(\frac{d\zeta}{ds}\frac{d^2\xi}{ds^2} - \frac{d\xi}{ds}\frac{d^2\zeta}{ds^2}\right) + A_3 r \,.\, \frac{d\eta}{ds} - \Gamma\xi = c_2 \\ A_1\left(\frac{d\xi}{ds}\frac{d^2\eta}{ds^2} - \frac{d\eta}{ds}\frac{d^2\xi}{ds^2}\right) + A_3 r \,.\, \frac{d\zeta}{ds} \qquad = c_3\,. \end{cases}$$

« Queste equazioni, quando si supponga $c_1 = c_2 = 0$, coincidono con quelle adoperate dall'Halphen. Le equazioni di Halphen si possono sostituire alle (1) quando oltre alle restrizioni indicate si possa fare in modo che l'asse ζ riesca contemporaneamente parallelo alla forza e all'asse momento della coppia delle tensioni esercitantesi alle ertremità del filo. Ora se pure, stante la piccolezza della sezione del filo, si possa supporre che queste tensioni sieno come applicate ai punti di un sistema rigido (2) e quindi si possano sostituire con un altro sistema di tensioni staticamente equivalente al primo, potrebbe anche avvenire che sostituendo quel sistema che si riduce ad una forza e ad una coppia il cui asse momento è parallelo alla forza, questa forza dovesse essere applicata in un punto esterno alla sezione estrema del filo. A questa osservazione pare che il Wantzell non abbia posto mente perchè nella sua Nota dei Compt. rend. asserisce che la riduzione precedente sia sempre possibile.

(1) Vedi Bianchi, *Lez. di geom. diff.*, pag. 7, form. (8).

(2) Mathieu asserisce che ciò è inesatto (Vedi: *Théorie de l'élast. des corps sol.*, 1e partie, pag. 135).

« 3. Mostriamo ora come si possono trovare semplicemente le formole che ci danno le coordinate di un punto della linea elastica nel caso che corrisponde ai moti di un corpo rigido di Lagrange, servendoci delle equazioni di Kirchhoff.

« Dalle formole stesse di Halphen [1] risulta:

$$(5)\quad \begin{cases} \gamma_3 = \dfrac{2pu - pa - pa_1}{pa - pa_1} \\ \alpha_3 + i\beta_3 = -\dfrac{2\,\mathrm{E}_1\,\sigma a\,\sigma a_1\,\sigma(u-a)\,\sigma(u+a_1)}{\sigma(a-a_1)\,\sigma(a+a_1)\,\sigma^2 u}\,e^{(\zeta a - \zeta a_1)u} \\ \alpha_3 - i\beta_3 = \dfrac{2\sigma a\,\sigma a_1\,\sigma(u+a)\,\sigma(u-a_1)}{\mathrm{E}_1\,\sigma(a-a_1)\,\sigma(a+a_1)\sigma^2 u}\,e^{-(\zeta a - \zeta a_1)u} \end{cases}$$

dove p, σ e ζ sono i noti simboli delle funzioni di Weierstrass; E, a, a_1 sono costanti e l'argomento variabile u invece di essere proporzionale al tempo, come nel moto di un corpo rigido, è proporzionale all'arco s della curva. E facile trasformare le due ultime equazioni (5) servendoci delle formole di decomposizione in elementi semplici delle funzioni ellittiche di seconda specie [2]. Abbiamo infatti:

$$\frac{\sigma(u-a)\,\sigma(u+a_1)}{\sigma^2 u}\,e^{(\zeta a - \zeta a_1)u} = -\frac{\sigma a\,\sigma a_1}{\sigma(a-a_1)}\frac{d}{du}\left[\frac{\sigma(u-a+a_1)}{\sigma u}\,e^{(\zeta a - \zeta a_1)u}\right]$$

$$\frac{\sigma(u+a)\,\sigma(u-a_1)}{\sigma^2 u}\,e^{(\zeta a_1 - \zeta a)u} = \frac{\sigma a\,\sigma a_1}{\sigma(a-a_1)}\frac{d}{du}\left[\frac{\sigma(u+a-a_1)}{\sigma u}\,e^{(\zeta a_1 - \zeta a)u}\right].$$

« Le formole (5) si potranno allora scrivere:

$$(5')\quad \begin{cases} \gamma_3 = \dfrac{2\,pu - pa - pa_1}{pa - pa_1} \\ \alpha_3 + i\beta_3 = \dfrac{2\,\mathrm{E}_1}{\sigma(a-a_1)}\dfrac{1}{pa_1 - pa}\dfrac{d}{du}\left[\dfrac{\sigma(u-a+a_1)}{\sigma u}\,e^{(\zeta a - \zeta a_1)u}\right] \\ \alpha_3 - i\beta_3 = \dfrac{2}{\mathrm{E}_1\sigma(a-a_1)}\dfrac{1}{pa_1 - pa}\dfrac{d}{du}\left[\dfrac{\sigma(u+a-a_1)}{\sigma u}\,e^{(\zeta a_1 - \zeta a)u}\right]. \end{cases}$$

« Ricordando poi che le coordinate ξ, η, ζ di un punto della linea elastica si ottengono per mezzo delle formole:

$$\xi = \int \alpha_3\,ds\ ,\ \eta = \int \beta_3\,ds\ ,\ \zeta = \int \gamma_3\,ds$$

[1] 2° partie, Chap. III, formule (19), (29), (30).

[2] Halphen, 1° partie, pag. 228-230.

si avrà anche:

$$
(6)\quad \begin{cases}
\zeta = \dfrac{2\zeta u + (pa + pa_1)u}{pa_1 - pa} + \text{cost.} \\[2ex]
\xi + i\eta = \dfrac{2E_1}{\sigma(a - a_1)} \dfrac{1}{pa_1 - pa} \dfrac{(\sigma u - a + a_1)}{\sigma u} e^{(\zeta a - \zeta a_1)u} + \text{cost.} \\[2ex]
\xi - i\eta = \dfrac{2}{E_1\, \sigma(a - a_1)} \dfrac{1}{pa_1 - pa} \dfrac{\sigma(u + a - a_1)}{\sigma u} e^{(\zeta a_1 - \zeta a)u} + \text{cost.}
\end{cases}
$$

« In queste formole il fattore di proporzionalità che da s fa passare ad u l'abbiamo supposto eguale ad uno; del resto lasciando questo fattore arbitrario si possono prendere per ξ, η, ζ dei valori proporzionali in modo che le (6) restino sempre giuste.

« 4. Nel caso poi in cui $\Gamma = 0$ è:

$$
(7)\quad \begin{cases}
\gamma_3 = \dfrac{\sigma(u - \omega_3)\sigma(v - \omega_3)}{\sigma u\, \sigma v} e^{\eta_3 (u + v - \omega_3)} \\[2ex]
\alpha_3 + i\beta_3 = \mathrm{K}\, e^{-(i\frac{f}{\mu} + \zeta v)u} \dfrac{\sigma(u + v - \omega)\,\sigma\omega_3}{\sigma u\, \sigma v} e^{\eta_3 (u + v - \omega_3)} \\[2ex]
\alpha_3 - i\beta_3 = \dfrac{1}{\mathrm{K}} e^{(i\frac{f}{\mu} + \zeta v)} \dfrac{\sigma(u - v + \omega_3)\,\sigma\omega_3}{\sigma u\, \sigma v} e^{\eta_3 (v - u - \omega_3)} .
\end{cases}
$$

In questo caso però le quadrature mediante le quali da α_3, β_3, γ_3 si passa alle coordinate ξ, η, ζ di un punto della linea elastica si possono soltanto accennare.

« Qui possiamo anche notare che le equazioni usate dall'Halphen non contengono ques'ultimo caso se si fa eccezione di quello in cui $A_1 = A_2$ che può anche considerarsi come caso limite di quello trattato nel n.° 3.

« In questa ipotesi in cui $\Gamma = 0$, $A_1 = A_2$ la linea elastica è un'elica circolare poichè è costante la torsione r ed anche la flessione $\sqrt{p^2 + q^2}$. Che sia un'elica risulta pure facilmente dalle (4), quando in esse si faccia $\Gamma = 0$, poichè moltiplicandole successivamente per $\dfrac{d\xi}{ds}$, $\dfrac{d\eta}{ds}$, $\dfrac{d\zeta}{ds}$ e sommando risulta:

$$
A_3\, r = c_1 \frac{d\varsigma}{ds} + c_2 \frac{d\eta}{ds} + c_3 \frac{d\zeta}{ds} .
$$

« Questa relazione mostra infatti che il coseno dell'angolo, e quindi anche l'angolo, che la tangente alla linea elastica fa con la direzione dell'asse momento della coppia delle tensioni agenti su ciascuna delle sezioni estreme del filo è costante. La linea è quindi un'elica tracciata su un cilindro le cui generatrici sono parallele alla direzione dell'asse momento di cui sopra si è discorso.

« 5. Da quello che s'è detto appare che non sarebbe privo di interesse lo studio geometrico delle curve che sono in tale relazione con i moti di un corpo rigido pesante che una delle componenti della rotazione, secondo assi fissi nel corpo, sia la torsione e le altre due componenti sieno le flessioni delle proiezioni della curva su due piani ortogonali passanti per la tangente, anche facendo astrazione dal problema particolare di cui ci siamo occupati. Ciò sarebbe fuor di luogo in questa breve Nota; ma è facile prevedere che molte proposizioni sul moto di un corpo rigido pesante potrebbero avere un'altra possibile interpretazione.

« Ai moti di Poinsot o, più in particolare, ai moti di un corpo rigido pesante intorno al baricentro corrispondono curve tali che la torsione e le flessioni delle proiezioni della curva su certi due piani ortogonali passanti per la tangente sono proporzionali ai coseni di direzione che una retta fissa forma con la tangente e con le intersezioni del piano normale con i due piani accennati.

« Se la quadrica base dei movimenti di Poinsot o, più in particolare l'ellissoide d'inerzia del solido pesante che rota intorno al baricentro, è di rivoluzione, la curva corrispondente, come si è visto, è un'elica di un cilindro circolare.

« Se delle costanti A_1, A_2, A_3, supposte positive, A_1, p. es., è la più grande il teorema della stabilità della rotazione intorno all'asse d'inerzia corrispondente ad A_1 si può interpretare nel modo seguente: Se in un punto della curva è $q = r = 0$, è sempre $q = r = 0$ e la curva è un circolo di raggio $\frac{1}{p}$.

« Si troverebbe facilmente anche questo teorema: Se il triedro principale di una curva rota come un corpo rigido pesante intorno al baricentro e la curva non è a torsione nulla, questa curva non può essere altro che un'elica circolare; se poi la torsione è nulla la curva è un circolo. In particolare la curva può ridursi ad una retta; in questo caso soltanto r è diverso da zero.

« Questi risultati si ricavano dalle (1) supponendo in esse $\Gamma = p = 0$, giacchè il triedro principale di una curva rota sempre intorno ad un asse perpendicolare alla binormale.

« Abbiamo pure osservato e lo notiamo qui che ai moti di Lagrange corrispondono curve tutte a torsione costante ».