ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Seduta del 15 aprile 1894.

A. Messedaglia Vicepresidente

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *I numeri di Grassmann in Geometria intrinseca.* Nota di E. Cesàro, presentata a nome del Socio F. Siacci.

« L'uso dei *numeri alternati* conferisce una forma assai precisa ed elegante ai calcoli ed ai risultati dell'analisi intrinseca delle superficie, e permette, in particolare, di compendiare in una sola le tre celebri *formole di Codazzi.* Affinchè x, y, z rappresentino le coordinate d'un punto fisso dello spazio rispetto ad una terna ortogonale di assi, uno dei quali (l'asse delle z) si suppone normale alla superficie nell'origine mobile, sono necessarie e sufficienti le condizioni

$$\frac{dx}{ds}=\mathcal{N}z-\mathcal{G}y-1\,,\quad \frac{dy}{dz}=\mathcal{G}x-\mathcal{T}z\,,\quad \frac{dz}{ds}=\mathcal{T}y-\mathcal{N}x\,, \tag{1}$$

in cui $\mathcal{N}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{T}$ rappresentano rispettivamente la *curvatura normale*, la *curvatura geodetica*, la *torsione geodetica* d'una linea della superficie, tangente nell'origine all'asse delle x. Alle relazioni (1) si può dar la forma

$$\begin{cases} i\,\dfrac{dx}{ds}=i\mathcal{T}\,.\,ix+k\mathcal{G}\,.\,jy+j\mathcal{N}\,.\,kz-i \\ j\,\dfrac{dy}{ds}=k\mathcal{G}\,.\,ix+j\mathcal{N}\,.\,jy+i\mathcal{T}\,.\,kz \\ k\dfrac{dz}{ds}=j\mathcal{N}\,.\,ix+i\mathcal{T}\,.\,jy+k\mathcal{G}\,.\,kz \end{cases} \tag{2}$$

convenendo che le unità i, j, k abbiano i quadrati nulli, e che le condizioni

$$i = jk = -kj\,,\quad j = ki = -ik\,,\quad k = ij = -ji \tag{3}$$

siano soddisfatte. Ora le (2) si possono compendiare, sommandole, nell'unica formola

$$\frac{d\Omega}{ds} = \omega\Omega - i\,, \tag{4}$$

in cui compariscono soltanto i vettori

$$\Omega = ix + jy + kz\,,\quad \omega = i\mathfrak{C} + j\mathfrak{N} + k\mathfrak{G}.$$

Così la derivazione rispetto all'arco si riduce alla semplicissima operazione vettoriale, rappresentata dal simbolo ω. Importa dunque conoscere l'effetto delle operazioni ω^2, ω^3, ... sulle unità fondamentali.

« Conviene osservare, innanzi tutto, che, per le convenzioni (3), il prodotto di tre unità fondamentali è generalmente nullo, tranne quando il secondo o il terzo fattore soltanto sia uguale al primo, nei quali due casi il prodotto si riduce al rimanente fattore, preso rispettivamente col segno cambiato o col proprio segno. In altri termini

$$iji = j\,,\quad iij = -j\,, \ldots . \tag{5}$$

Ne segue, se si considerano più generalmente le operazioni vettoriali

$$\omega_1 = i\alpha_1 + j\beta_1 + k\gamma_1\,,\quad \omega_2 = i\alpha_2 + j\beta_2 + k\gamma_2\,,$$

che l'operazione

$$\begin{aligned}\omega_1\omega_2 = {} & ii\,\alpha_1\,\alpha_2 + ij\,\alpha_1\,\beta_2 + ik\alpha_1\,\gamma_2\\ & + ji\,\beta_1\,\alpha_2 + jj\,\beta_1\,\beta_2 + jk\beta_1\,\gamma_2\\ & + ki\,\gamma_1\,\alpha_2 + kj\,\gamma_1\,\beta_2 + kk\gamma_1\,\gamma_2\,,\end{aligned}$$

applicata, per esempio, all'unità i, produce il risultato

$$iji\,\alpha_1\beta_2 + iki\,\alpha_1\gamma_2 + jji\,\beta_1\beta_2 + kki\,\gamma_1\gamma_2\,,$$

cioè

$$\omega_1\omega_2\,i = -\,i\,(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) + \omega_2\,\alpha_1\,. \tag{6}$$

Operando invece sull'unità scalare si ottiene

$$\omega_1\omega_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

In particolare $\omega^2 = 0$ ed

$$\omega^2\,i = -\,i\varkappa^2 + \omega\mathfrak{C}\,,\quad \omega^2\,j = -\,j\varkappa^2 + \omega\mathfrak{N}\,,\quad \omega^2\,k = -\,k\varkappa^2 + \omega\mathfrak{G}\,, \tag{8}$$

dove $\varkappa$ rappresenta il modulo di ω.

« Ora è assai facile trovare le formole per le quali le successive derivate di x, y, z si esprimono linearmente in x, y, z. Infatti, quando si prescinde dalla variazione delle curvature, la (4) dà

$$\frac{d^n\,\Omega}{ds^n} = \omega^n\,\Omega - \omega^{n-1}\,i\,,$$

e tutto si riduce al calcolo dei risultati dell'operazione ω^n sulle unità fondamentali. Ed a questi risultati facilmente si perviene mediante le formole (8) e le altre, evidenti,

$$\omega i = j\mathcal{G} - k\mathcal{N}, \quad \omega j = k\mathcal{T} - i\mathcal{G}, \quad \omega k = i\mathcal{N} - j\mathcal{T}, \tag{9}$$

perchè, se si osserva che il risultato di più operazioni vettoriali identiche su qualunque scalare è nullo, si ottiene

$$\omega^{2n+1}.\, i = (-1)^n \omega i \varkappa^{2n}, \quad \omega^{2n+2}.\, i = (-1)^n \omega^2 i \varkappa^{2n}.$$

In particolare, se si vogliono le formole analoghe alle (1), relative alle derivate seconde, si ha

$$\frac{d^2\Omega}{ds^2} = \omega^2 ix + \omega^2 jy + \omega^2 kz - i,$$

ovvero, in virtù di (8) e di (9),

$$\frac{d^2\Omega}{ds^2} = -\Omega\varkappa^2 + \omega\mu + k\mathcal{N} - j\mathcal{G},$$

dove μ rappresenta $\mathcal{T}x + \mathcal{N}y + \mathcal{G}z$. Questa eguaglianza si scinde manifestamente in

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -x\varkappa^2 + \mathcal{T}\mu, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = -y\varkappa^2 + \mathcal{N}\mu, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = -z\varkappa^2 + \mathcal{G}\mu.$$

Ai secondi membri bisognerà poi aggiungere i termini provenienti dalla variazione delle curvature, cioè

$$z\frac{d\mathcal{N}}{ds} - y\frac{d\mathcal{G}}{ds}, \; x\frac{d\mathcal{G}}{ds} - z\frac{d\mathcal{T}}{ds}, \; y\frac{d\mathcal{T}}{ds} - x\frac{d\mathcal{N}}{ds}.$$

« Un'altra notevole conseguenza trarremo dalla formola (6) osservando in primo luogo che

$$(\omega_1\omega_2 - \omega_2\omega_1)\, i = \omega_2\alpha_1 - \omega_1\alpha_2 \tag{10}$$

Sia $i\alpha + j\beta + k\gamma$ l'operazione vettoriale equivalente ad $\omega_1\omega_2 - \omega_2\omega_1$, sia cioè

$$(i\alpha + j\beta + k\beta)\, \Omega = (\omega_1\omega_2 - \omega_2\omega_1)\, \Omega.$$

In virtù delle (5) si ha

$$i\,(\omega_1\,\omega_2 - \omega_2\,\omega_1)\, i = i\,(i\alpha + j\beta + k\gamma)\, i = j\beta + k\gamma.$$

Dunque, osservando la (10),

$$\left\{\begin{aligned} j\beta + k\gamma &= i\omega_2\,\alpha_1 - i\omega_1\,\alpha_2 \quad , \\ k\gamma + i\alpha &= j\omega_2\,\beta_1 - j\omega_1\,\beta_2 \quad , \\ i\alpha + j\beta &= k\omega_2\,\gamma_1 - k\omega_1\,\gamma_2 \quad ; \end{aligned}\right.$$

poi, sommando,

$$i\alpha + j\beta + k\gamma = \frac{1}{2}(\omega_1\omega_2 - \omega_2\omega_1) = \omega_1\omega_2. \tag{11}$$

Adunque l'operazione $\omega_1\omega_2 - \omega_2\omega_1$, la quale, applicata alle quantità scalari, equivale a $2\omega_1\omega_2$, si riduce invece ad $\omega_1\omega_2$ quando è applicata ad un vettore.

« Ora, tornando alla superficie, consideriamo un'altra curva, tangente nell'origine all'asse delle y, e distinguiamo con indici 1 e 2 tutto ciò che si riferisce alla prima o alla seconda curva. Siano q_1 e q_2 i parametri che definiscono le due curve in una rete ortogonale, e siano

$$ds_1 = Q_1\, dq_1 \quad , \quad ds_2 = Q_2\, dq_2$$

gli archi elementari. Posto

$$\omega_1 = i\mathcal{T}_1 + j\mathcal{N}_1 + k\mathcal{G}_1 \quad , \quad \omega_2 = i\mathcal{N}_2 - j\mathcal{T}_2 + k\mathcal{G}_2 \, ,$$

si ha, per la formola (4),

$$\frac{\partial \Omega}{\partial s_1} = \omega_1\, \Omega - i \quad , \quad \frac{\partial \Omega}{\partial s_2} = -\, \omega_2\, \Omega - j \tag{12}$$

Affinchè Ω esista occorre e basta che si abbia

$$Q_2 \frac{\partial}{\partial s_2}\left(Q_1 \frac{\partial \Omega}{\partial s_1}\right) = Q_1 \frac{\partial}{\partial s_1}\left(Q_2 \frac{\partial \Omega}{\partial s_2}\right),$$

vale a dire

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial s_1 \partial s_2} + \frac{\partial \log Q_1}{\partial s_2}\frac{\partial \Omega}{\partial s_1} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial s_2 \partial s_1} + \frac{\partial \log Q_2}{\partial s_1}\frac{\partial \Omega}{\partial s_2} \, . \tag{13}$$

Intanto dalle (12) si deduce

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial s_1 \partial s_2} = \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial s_2} - \omega_1 \omega_2\right) \Omega + j\omega_1 \quad , \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial s_2 \partial s_1} = -\left(\frac{\partial \omega_2}{\partial s_1} + \omega_2 \omega_1\right) \Omega - i\omega_2 \, ,$$

ed in particolare, per $\Omega = 0$, la (13) diventa

$$j\omega_1 + i\omega_2 = i\,\frac{\partial \log Q_1}{\partial s_2} - j\,\frac{\partial \log Q_2}{\partial s_1} \, .$$

Il primo membro ha il valore

$$i\mathcal{G}_1 - j\mathcal{G}_2 - k\,(\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2) \, .$$

Dunque

$$\mathcal{G}_1 = \frac{\partial \log Q_1}{\partial s_2} \ , \ \mathcal{G}_2 = \frac{\partial \log Q_2}{\partial s_1} \ , \ \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 = 0 \, .$$

Noi porremo $\mathcal{T}_1 = -\, \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}$. Ciò premesso, la formola (13) si riduce subito a

$$\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \omega_2}{\partial s_1} + \omega_1\, \mathcal{G}_1 + \omega_2\, \mathcal{G}_2\right) \Omega = (\omega_1 \omega_2 - \omega_2 \omega_1)\, \Omega \, ,$$

e però, se si tien conto della (11),

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial s_2} + \frac{\partial \omega_2}{\partial s_1} + \omega_1\, \mathcal{G}_1 + \omega_2\, \mathcal{G}_2 = \omega_1 \omega_2 \, .$$

È questa l'eguaglianza che chiude in sè le tre formole di Codazzi, alle quali si perviene osservando che il secondo membro ha, in virtù di (7), il valore

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \mathcal{T} & \mathcal{N}_1 & \mathcal{G}_1 \\ \mathcal{N} & \mathcal{T} & \mathcal{G} \end{vmatrix}$$

ed eguagliando fra loro i coefficienti di i, j, k nei due membri:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathfrak{N}_2}{\partial s_1}+\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial s_2}+2\mathfrak{T}\mathcal{G}_1=(\mathfrak{N}_1-\mathfrak{N}_2)\mathcal{G}_2\\ &\frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial s_2}+\frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial s_1}+2\mathfrak{T}\mathcal{G}_2=(\mathfrak{N}_2-\mathfrak{N}_1)\mathcal{G}_1\\ &\frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial s_2}+\frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial s_1}+\mathcal{G}_1^2+\mathcal{G}_2^2=\mathfrak{T}^2-\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2\,. \end{aligned}\right.$$

Fisica matematica. — *Alcune considerazioni relative alla Nota del prof. Pizzetti: « Sull'espressione della gravità alla superficie del geoide supposto ellissoidico* (1) *»*. Nota di G. Morera, presentata dal Socio Beltrami.

« § I. Il prof. Pizzetti ha dimostrato che la funzione:

$$V=\int_\lambda^\infty\left(1-\frac{3x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R(s)}}\,,$$

dove:

x, y, z indicano le coordinate del punto potenziato;
$R(s)$ il polinomio $(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)$;
λ la maggior radice dell'equazione cubica

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1\,,$$

all'esterno dell'ellissoide: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ha le proprietà della funzione potenziale di una distribuzione di agente fatta nell'ellissoide, distribuzione che, dalle proprietà di convergenza all'infinito, risulta contenere una quantità totale di agente uguale a zero.

« Orbene, se i valori di una funzione in punti esterni all'ellissoide si distinguono coll'indice e, e quelli relativi a punti interni coll'indice i, e si pone

$$V_e=\int_\lambda^\infty\left(1-\frac{3x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R(s)}}\,,$$
$$V_i=\int_0^\infty\left(1-\frac{3x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R(s)}}\,,$$

(1) Vedi Rendiconti, fasc. 5, pag. 200 e seg.