ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

ed eguagliando fra loro i coefficienti di i, j, k nei due membri:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial \mathcal{H}_2}{\partial s_1}+\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial s_2}+2\mathcal{T}\mathcal{G}_1=(\mathcal{H}_1-\mathcal{H}_2)\mathcal{G}_2\\&\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial s_2}+\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial s_1}+2\mathcal{T}\mathcal{G}_2=(\mathcal{H}_2-\mathcal{H}_1)\mathcal{G}_1\\&\frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial s_2}+\frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial s_1}+\mathcal{G}_1^2+\mathcal{G}_2^2=\mathcal{T}^2-\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2.\end{aligned}\right.$$

Fisica matematica. — *Alcune considerazioni relative alla Nota del prof. Pizzetti: « Sull'espressione della gravità alla superficie del geoide supposto ellissoidico* [1] *»*. Nota di G. Morera, presentata dal Socio Beltrami.

« § I. Il prof. Pizzetti ha dimostrato che la funzione:

$$V=\int_\lambda^\infty\left(1-\frac{3x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R(s)}},$$

dove:

x, y, z indicano le coordinate del punto potenziato;
$R(s)$ il polinomio $(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)$;
λ la maggior radice dell'equazione cubica

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1,$$

all'esterno dell'ellissoide: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ha le proprietà della funzione potenziale di una distribuzione di agente fatta nell'ellissoide, distribuzione che, dalle proprietà di convergenza all'infinito, risulta contenere una quantità totale di agente uguale a zero.

« Orbene, se i valori di una funzione in punti esterni all'ellissoide si distinguono coll'indice e, e quelli relativi a punti interni coll'indice i, e si pone

$$V_e=\int_\lambda^\infty\left(1-\frac{3x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R(s)}},$$

$$V_i=\int_0^\infty\left(1-\frac{3x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R(s)}},$$

[1] Vedi Rendiconti, fasc. 5, pag. 200 e seg.

si vede immediatamente che la funzione V così definita, in tutto lo spazio è monodroma, continua e finita, mentre le sue derivate lo sono soltanto separatamente all'interno e all'esterno, ma attraverso la superficie sono discontinue.

« Si trova infatti:

$$\frac{\partial V_e}{\partial x} = -6x\int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2+s)^2\sqrt{R(s)}} + \frac{4x^3}{(a^2+\lambda)^3\sqrt{R(\lambda)}.P^2};$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = -6x\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)^2\sqrt{R(s)}};$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial y} = -2y\int_\lambda^\infty \frac{ds}{(a^2+s)(b^2+s)\sqrt{R(s)}} + \frac{4x^2y}{(a^2+\lambda)^2(b^2+\lambda)\sqrt{R(\lambda)}.P^2};$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial y} = -2y\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)(b^2+s)\sqrt{R(s)}}$$

ed espressioni analoghe per $\frac{\partial V_e}{\partial z}$, $\frac{\partial V_i}{\partial z}$, nelle quali tutte:

$$P^2 = \frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}.$$

« Attraverso alla superficie σ dell'ellissoide sarà quindi:

$$\frac{\partial V_e}{\partial x} - \frac{\partial V_i}{\partial x} = \frac{4p^2x^3}{a^6.abc};$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial y} - \frac{\partial V_i}{\partial y} = \frac{4p^2x^2y}{a^4.b^2.abc};$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial z} - \frac{\partial V_i}{\partial z} = \frac{4p^2x^2z}{a^4.c^2.abc};$$

dove p indica la distanza dal centro del piano tangente all'ellissoide in x, y, z. E, indicando con n_e la direzione $\left(p\frac{x}{a^2}, p\frac{y}{b^2}, p\frac{z}{c^2}\right)$ della normale esterna all'ellissoide e con n_i quella della normale interna, si ha ovviamente:

$$\frac{\partial V_e}{\partial n_e} + \frac{\partial V_i}{\partial n_i} = \frac{4px^2}{a^4.abc}.$$

« Inoltre si ha facilmente:

$$\Delta_2 V_i = -2\int_0^\infty\left(\frac{3}{a^2+s} + \frac{1}{b^2+s} + \frac{1}{c^2+s}\right)\frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R(s)}} = -\frac{4}{a^2.abc}.$$

« Quindi posto:

$$k = -\frac{\Delta_2 V_i}{4\pi} = \frac{1}{\pi abc.a^2}, \quad h = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V_e}{\partial n_e} + \frac{\partial V_i}{\partial n_i}\right) = \frac{x\cos(n_i, x)}{\pi abc.a^2},$$

si conclude che V è la funzione potenziale di una distribuzione uniforme di agente, fatta nell'interno dell'ellissoide colla densità k, e di una distribuzione fatta sulla superficie colla densità h.

« Indicando: con dS l'elemento di volume, con $d\sigma$ l'elemento di superficie dell'ellissoide, e con r la distanza del punto potenziato dall'elemento potenziante, sarà adunque:

$$V = \int \frac{k dS}{r} + \int \frac{h d\sigma}{r} = \frac{1}{\pi abc \,.\, a^2} \left[\int \frac{dS}{r} + \int \frac{x}{r} \frac{\partial x}{\partial n_i} d\sigma \right]$$

$$= - \frac{1}{\pi abc \,.\, a^2} \int x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dS.$$

« L'ultimo integrale è la funzione potenziale dell'ellissoide magnetizzato parallelamente all'asse delle x, con momento unitario uguale ad x.

« § II. Se nell'espressione primitiva di V_e in luogo di s si pone $s' - s_1$ dove s_1 indica una costante; poi si fa

$$a_1 = \sqrt{a^2 - s_1}\,, \quad b_1 = \sqrt{b^2 - s_1}\,, \quad c_1 = \sqrt{c^2 - s_1}\,,$$

e con λ_1 si indica la maggior radice dell'equazione:

$$\frac{x^2}{a_1{}^2 + \lambda_1} + \frac{y^2}{b_1{}^2 + \lambda_1} + \frac{z^2}{c_1{}^2 + \lambda_1} = 1\,;$$

la nuova espressione di V_e è formata con a_1, b_1, c_1, λ_1 nella stessa guisa che l'antica lo era con a, b, c, λ.

« Dunque nel calcolo di V_e all'ellissoide primitivo si può sostituire un ellissoide, omofocale, interno, qualunque.

« Se $a > b > c$ si può assumere $s_1 = c^2$ e quindi all'ellissoide sostituire il disco limitato dall'ellisse focale:

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1\,,$$

ed allora, ritenendo dapprima s_1 infinitamente poco differente da c^2, si ha:

$$V_e = - \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - c^2} \sqrt{b^2 - c^2}\,(a^2 - c^2)} \lim_{c_1 = 0} \frac{1}{c_1} \int d\sigma \int_{-z_1}^{z_1} x \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dz\,,$$

dove:

$$z_1 = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2 - c^2} - \frac{y^2}{b^2 - c^2}} \cdot c_1\,.$$

Ma detta ϱ la distanza del punto potenziato (ξ, η, ζ) dall'elemento $d\sigma$ $(x, y, 0)$, per z infinitesimo si ha:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{\partial \frac{1}{\varrho}}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \frac{1}{\partial \varrho}}{\partial x}$$

e quindi:

$$V_e = -\frac{2}{\sigma\,(a^2-c^2)}\int x\sqrt{\frac{x^2}{a^2-c^2}-\frac{y^2}{b^2-c^2}}\cdot\frac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial x}\,d\sigma$$

$$=\frac{2}{3\sigma}\int\frac{\partial}{\partial x}\left[1-\frac{x^2}{a^2-c^2}-\frac{y^2}{b^2-c^2}\right]^{\frac{3}{2}}\frac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial x}\,d\sigma$$

$$=-\frac{2}{3\sigma}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\int\left[1-\frac{x^2}{a^2-c^2}-\frac{y^2}{b^2-c^2}\right]^{\frac{3}{2}}\frac{d\sigma}{\varrho}\,.$$

« La stessa formula sussiste ancora se a è l'asse intermedio, cioè se: $b>a>c$, ma non sussiste più se a è l'asse minore, cioè se $c>b>a$. Allora, prendendo dapprima s_1 infinitamente poco diverso da a^2, si ha:

$$V_e = -\frac{1}{\sigma}\lim_{a_1=0}\frac{1}{a_1{}^3}\int d\sigma\int_{-x_1}^{x_1} x\left[\frac{\partial\frac{1}{\varrho}}{\partial x}+x\frac{\partial^2\frac{1}{\varrho}}{\partial x^2}\right]dx,$$

dove:

$$x_1=\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2-a^2}-\frac{z^2}{c^2-a^2}}\cdot a_1\,,$$

e quindi:

$$V_e=-\frac{2}{3\sigma}\int\left[1-\frac{y^2}{b^2-a^2}-\frac{z^2}{c^2-a^2}\right]^{\frac{3}{2}}\frac{\partial^2\frac{1}{\varrho}}{\partial x^2}\,d\sigma$$

$$=-\frac{2}{3\sigma}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\int\left[1-\frac{y^2}{b^2-a^2}-\frac{z^2}{c^2-a^2}\right]^{\frac{3}{2}}\frac{d\sigma}{\varrho}\,.$$

« Queste formule mostrano che V_e è in ogni caso la seconda derivata, rapporto a ξ, di una ordinaria funzione potenziale; ed effettivamente si può riconoscere che V è la seconda derivata della funzione potenziale di una distribuzione di agente, fatta nell'ellissoide per strati omotetici.

« § III. Si ponga:

$$U=\int_{\lambda'}^{\infty}\frac{\varphi(\mu)\,ds}{\sqrt{R(s)}}\qquad\begin{pmatrix}\lambda'_e=\lambda\\ \lambda'_i=0\end{pmatrix},$$

dove:

$$\mu = 1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s},$$

e φ indica una funzione che ha la proprietà:

$$\varphi(0) = 0 .$$

Si trova immediatamente:

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x} = -2x \int_{\lambda'}^{\infty} \frac{\varphi'(\mu)\, ds}{(a^2+s)\sqrt{\mathrm{R}(s)}};$$

e se inoltre si ammette che $\varphi'(0) = 0$, si ha:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2} = 2 \int_{\lambda'}^{\infty} \frac{\dfrac{2x^2\varphi''(\mu)}{a^2+s} - \varphi'(\mu)}{(a^2+s)\sqrt{\mathrm{R}(s)}}\, ds .$$

Assunto adunque:

$$\varphi(\mu) = -\frac{\mu^2}{4},$$

ossia posto:

$$\mathrm{U}^{(2)} = -\frac{1}{4}\int_{\lambda'}^{\infty} \frac{\mu^2 ds}{\sqrt{\mathrm{R}(s)}},$$

risulta in tutto lo spazio:

$$\mathrm{V} = \frac{\partial^2\, \mathrm{U}^{(2)}}{\partial x^2},$$

ed analogamente per le altre due funzioni del tipo di V, che furono considerate dal prof. Pizzetti.

« Inoltre:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}^{(2)}}{\partial y\, \partial z} = -2yz \int_{\lambda'}^{\infty} \frac{ds}{(b^2+s)(c^2+s)\sqrt{\mathrm{R}(s)}}, \text{ ecc.};$$

e lo stesso procedimento seguito nel § I fa vedere che:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}^{(2)}}{\partial y\, \partial z} = -\frac{1}{\pi\, abc.\, b^2.c^2}\int \frac{pyz}{r} d\sigma = -\frac{1}{\pi\, a\, b\, c\, .\, c^2}\int z \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\, d\mathrm{S}$$

$$= -\frac{1}{\pi\, a\, b\, c\, .\, b^2}\int y \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\, d\mathrm{S}.$$

Dunque una combinazione lineare delle 6 derivate seconde della funzione potenziale $U^{(2)}$, e della funzione:

$$U^{(0)} = \int_{\lambda'}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{R(s)}}$$

ci dà la funzione potenziale di una distribuzione nell'ellissoide, che sovr'esso diviene uguale ad una *qualunque funzione* della forma:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + 2\pi yz + 2\chi zx + 2\varrho xy + \delta ,$$

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \pi, \chi, \varrho$ designano delle costanti. A tale riguardo si noti che sull'ellissoide ed all'esterno si ha:

$$\Delta_2 U^{(2)} = 0 \; ;$$

e però da una combinazione lineare di $\frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial z^2}$, ritenuto $a > b > c$, l'ultima di queste tre derivate si può eliminare; mentre col mezzo dell'equazione dell'ellissoide dalla funzione $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2$ si può eliminare z^2. Allora il determinante delle equazioni lineari nei moltiplicatori, le quali si ottengono eguagliando a quantità arbitrariamente date i coefficienti di x^2 e y^2 della detta combinazione lineare, è certamente maggiore di 0, come fu esplicitamente rilevato dal prof. Pizzetti.

« Notiamo infine, che se si pone $\varphi(\mu) = \mu$, la U diviene la funzione potenziale dell'ellissoide omogeneo, funzione che designeremo con $U^{(1)}$; e si ha:

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} = -2x \int_{\lambda'}^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{R(s)}}, \text{ ecc.}$$

Adunque una combinazione lineare delle tre derivate prime di $U^{(1)}$ ci dà una funzione potenziale, che sull'ellissoide diviene uguale ad una qualunque funzione lineare delle coordinate.

« Riassumendo concludiamo: con una combinazione lineare di $U^{(0)}$, delle derivate prime di $U^{(1)}$ e delle derivate seconde di $U^{(2)}$ si può costruire una funzione che all'esterno dell'ellissoide ha le proprietà possedute dalla funzione potenziale negli spazii vuoti di agente, e sulla superficie si riduce ad una qualunque funzione, intera, di 2° grado delle coordinate.

« Questa conclusione conduce direttamente alla risoluzione del problema propostosi dal prof. Pizzetti, nell'ipotesi più generale, e cioè, che l'ellissoide ruoti intorno ad un asse qualunque. La quantità di agente distribuita nell'ellissoide è in ogni caso data dal doppio del coefficiente di $U^{(0)}$, giacchè tutte le altre 9 funzioni potenziali considerate corrispondono a quantità totali di agente uguali a zero (1).

« Sarà bene osservare che, trovata la combinazione lineare F, delle 10 funzioni sopra indicate, la quale sull'ellissoide diviene uguale ad una data funzione di 2° grado delle coordinate, la funzione $F + \varepsilon \Delta_2 U^{(2)}$, dove ε indica una costante, all'esterno coincide colla F. D'altra parte si può disporre di ε in guisa che all'interno dell'ellissoide $F + \varepsilon \Delta_2 U^{(2)}$ soddisfi all'equazione di Laplace, per conseguenza la nostra conclusione sta anche per lo spazio rinchiuso dall'ellissoide ».

Fisica. — *Sulla distribuzione del magnetismo indotto nel ferro* (2). Nota di M. Ascoli, presentata dal Socio Blaserna.

« 14. Un'ultima serie di esperienze ho eseguito per decidere direttamente la questione trattata nelle mie Note precedenti. A ciò si prestavano molto bene i cilindri cavi e pieni descritti al § 9.

« Preparato un cilindro cavo nel modo detto, avvolgevo sopra di esso un'elica indotta colla quale eseguivo la misura al galvanometro balistico. In seguito costruivo, con altri fili, un fascio cilindrico pieno di sezione esattamente uguale a quella del vuoto interno del tubo; su di esso avvolgevo una seconda elica uguale alla prima per numero di giri e lo introducevo poi nell'interno del tubo; così con 377 fili si formava un grosso cilindro pieno (del diam. di mm. 22,24) con un'elica esterna ed una interna. La prima dava il magnetismo di tutto il cilindro, la seconda quello della parte interna; congiungendo poi le due in opposizione, cioè in modo da dare deviazioni balistiche opposte, si poteva ottenere anche la parte passante per lo strato superficiale, che doveva essere, e si trovava infatti, esattamente uguale alla differenza delle due precedenti. Disfatte le eliche ed i fasci, *coi medesimi 377 fili*, si ricomponeva un analogo sistema variando il numero di strati compresi tra le due eliche cioè formante il tubo; e così di seguito. In tal modo ciascuna misura dava l'intensità della magnetizzazione media in una sezione interna, crescente fino alla totale del cilindro.

« I risultati delle misure sono raccolti nella tabella seguente. I numeri si rendono paragonabili a quelli delle precedenti moltiplicandoli pel fattore

(1) Le tre derivate prime di $U^{(1)}$ sono notoriamente le funzioni potenziali dell'ellissoide, magnetizzato uniformemente nelle direzioni de'suoi assi.

(2) Questo lavoro, come i precedenti, fu eseguito nel Laboratorio di Fisica tecnica della R. Scuola degli ingegneri in Roma.