ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Seduta del 7 gennaio 1894.

F. BRIOSCHI Presidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle forme quaternarie quadratiche e sui gruppi poliedrici.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

« Nei miei lavori sui gruppi di sostituzioni lineari, inseriti nei volumi 42° e 43° dei « Mathematische Annalen, » avevo già toccato delle relazioni fra la teoria dei gruppi poliedrici e quella delle forme quaternarie quadratiche. Questi concetti fondamentali furono poi da me ripresi e sviluppati in una Memoria, consegnata lo scorso agosto alla Direzione degli « Annali di matematica, e testè pubblicata. Ivi mi sono occupato della determinazione del gruppo aritmetico riproduttivo delle forme quaternarie quadratiche riducibili con trasformazione reale al tipo

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - u_4^2.$$

« Ma volendo studiare completamente la composizione di questo gruppo sino ad assegnarne in diversi casi concreti, colla determinazione del poliedro fondamentale, le sostituzioni generatrici, mi sono limitato per brevità e semplicità al caso delle forme

$$x_1^2 + x_2^2 + \mu\,(x_3^2 - \nu\, x_4^2),$$

ove μ, ν indicano numeri interi positivi. Però, come è avvertito nella prefazione, il metodo è applicabile anche nei casi più generali.

« Frattanto è comparsa una Nota del signor Fricke (1), ove, in altro

(1) *Ueber indefinite quadratische Formen mit drei und vier Veränderlichen* (Nachrichten der k. Gesellschaft zu Göttingen 18 november, 1893).

modo, viene effettuata la trasformazione del gruppo riproduttivo di una forma quaternaria
$$px_1^2 + qx_2^2 + rx_3^2 - sx_4^2$$
in un gruppo poliedrico. Nella sua pregevole Nota il signor Fricke si arresta per altro alla definizione aritmetica del gruppo poliedrico corrispondente, la quale riesce inoltre piuttosto complicata, a causa delle congruenze cui sono assoggettati i coefficienti della sostituzione.

« Nella presente nota mi propongo di applicare il metodo della mia ultima Memoria [1] al caso delle forme quaternarie:
$$px_1^2 + qx_2^2 + rx_3^2 - sx_4^2,$$
in cui p, q, r, s denotano, in generale, numeri primi. I gruppi poliedrici che così ottengo hanno, come si vedrà, una costituzione molto più semplice di quelli trovati dal signor Fricke, la forma delle loro sostituzioni permettendo immediatamente di constatare la proprietà fondamentale, che esse formano appunto un gruppo.

§ 1.

« Alle sostituzioni lineari a coefficienti reali coll'ultimo coefficiente positivo, e a determinante $+1$, che trasformano in sè stessa la forma quaternaria
$$f = px_1^2 + qx_2^2 + rx_3^2 - sx_4^2, \tag{1}$$
possiamo dare, secondo il § 8 M. A. la forma seguente:

$$(2)\left\{\begin{aligned}
x'_1 = {} & \frac{1}{2}\left\{a^2 + a_0^2 - b^2 - b_0^2 - c^2 - c_0^2 + d^2 + d_0^2\right\} x_1 + \frac{i\sqrt{q}}{2\sqrt{p}}\left\{a^2 - a_0^2 + b_0^2 - b^2 + \right.\\
& \left. + c_0^2 - c^2 + d^2 - d_0^2\right\} x_2 + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{p}}\left\{ac_0 + a_0c + bd_0 + b_0d\right\} x_3 + \\
& + \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{p}}\left\{ad_0 + a_0d + bc_0 + b_0c\right\} x_4 \\
x'_2 = {} & \frac{i\sqrt{p}}{2\sqrt{q}}\left\{a_0^2 - a^2 + b^2 - b_0^2 + c_0^2 - c^2 + d^2 - d_0^2\right\} x_1 + \\
& + \frac{1}{2}\left\{a^2 + a_0^2 - b^2 - b_0^2 + c^2 + c_0^2 - d^2 - d_0^2\right\} x_2 + \\
& + \frac{i\sqrt{r}}{\sqrt{q}}\left\{a_0c - ac_0 + b_0d - bd_0\right\} x_3 + \frac{i\sqrt{s}}{\sqrt{q}}\left\{a_0d - ad_0 + b_0c - bc_0\right\} x_4 \\
x'_3 = {} & \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{r}}\left\{bd + b_0d_0 - ac - a_0c_0\right\} x_1 + \frac{i\sqrt{q}}{\sqrt{r}}\left\{bd - b_0d_0 + a_0c_0 - ac\right\} x_2 + \\
& + \left\{aa_0 + bb_0 - cc_0 - dd_0\right\} x_3 + \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}}\left\{ab_0 + a_0b - cd_0 - c_0d\right\} x_4 \\
x'_4 = {} & \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{s}}\left\{ad + a_0d_0 - bc - b_0c_0\right\} x_1 + \frac{i\sqrt{q}}{\sqrt{s}}\left\{ad - a_0d_0 + b_0c_0 - bc\right\} x_2 + \\
& + \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{s}}\left\{ab_0 + a_0b + cd_0 + c_0d\right\} x_3 + \left\{aa_0 + bb_0 + cc_0 + dd_0\right\} x_4,
\end{aligned}\right.$$

[1] Citerò questo lavoro con (M. A.).

dove a, b, c, d indicano costanti complesse legate alle loro conjugate a_0, b_0, c_0, d_0 dalla relazione

$$(a+b)\ (a_0-b_0)+(c+d)\ (c_0-d_0)=1\,. \tag{3}$$

« A questa sostituzione quaternaria facciamo corrispondere univocamente la sostituzione sulla variabile complessa z

$$z'=\frac{(a+b)\,z+(c+d)}{(-c_0+d_0)\,z_0+(a_0-b_0)}\,. \tag{4}$$

« Cangiando nella (2) il segno di x'_2, avremo le sostituzioni lineari a determinante -1, che riproducono la forma f. A queste corrispondono le sostituzioni lineari di 2^a *specie*.

$$z'=\frac{(a+b)z_0+(c+d)}{(-c_0+d_0)z_0+(a_0-b_0)}\,. \tag{4*}$$

« Ora consideriamo quel sottogruppo G del gruppo aritmetico riproduttivo di f, le cui sostituzioni sono congrue coll'identità (mod· 2) ed hanno l'ultimo coefficiente positivo [1]. A G corrisponde un gruppo poliedrico Γ di sostituzioni (4), (4*), che ci proponiamo di studiare.

« Per ciò ricercheremo anzi tutto la forma delle *riflessioni* in Γ e la natura del sottogruppo eccezionale Γ' di Γ, che nasce combinando fra loro soltanto le riflessioni di Γ. Da Γ' si potrà poi risalire a Γ nel modo spiegato nella Memoria citata.

« Ora le riflessioni proprie, date dalla (4*), si ottengono quando b è nullo e c, d sono puramente immaginarii. Ponendo

$$a=a_1+ia_2\quad,\ b=0\quad,\ c=ic_1\,,\quad d=id_1\,,$$

col tener conto della relazione

$$a_1^2+a_2^2+c_1^2-d_1^2=1\,,$$

per la corrispondente sostituzione quaternaria (2) si ottiene lo schema seguente:

$$\begin{vmatrix} 1-2a_2^2, & -\dfrac{\sqrt{q}}{\sqrt{p}}\,2a_1a_2, & \dfrac{\sqrt{r}}{\sqrt{p}}\,2a_2c_1, & \dfrac{\sqrt{s}}{\sqrt{p}}\,2a_2d_1 \\ -\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{q}}\,2a_1a_2, & 1-2a_1^2, & \dfrac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}}\,2a_1c_1, & \dfrac{\sqrt{s}}{\sqrt{q}}\,2a_1d_1 \\ \dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{r}}\,2a_2c_1, & \dfrac{\sqrt{q}}{\sqrt{r}}\,2a_1c_1, & 1-2c_1^2, & -\dfrac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}}\,2c_1d_1 \\ -\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{s}}\,2a_2d_1, & -\dfrac{\sqrt{q}}{\sqrt{s}}\,2a_1d_1, & \dfrac{\sqrt{r}}{\sqrt{s}}\,2c_1d_1, & 1+2d_1^2 \end{vmatrix}\,. \tag{5}$$

[1] Nella Memoria degli « Annali » si trovano diffusamente spiegate le ragioni che rendono preferibile alla ricerca diretta del gruppo totale quella del suo sottogruppo eccezionale G, dal quale è poi facile risalire al gruppo totale stesso.

« Dobbiamo ora vedere quali valori sono da attribuirsi alle costanti reali a_1, a_2, c_1, d_1, affinchè i coefficienti dello schema precedente riescano numeri interi e di più quelli della diagonale principale *dispari*, gli altri tutti *pari*. Intanto

$$a_1^2\,,\ a_2^2\,,\ c_1^2\,,\ d_1^2$$

dovranno essere interi e, se con

$$\alpha_1^2\,,\ \alpha_2^2\,,\gamma_1^2\,,\ \delta_1^2\,,$$

indichiamo rispettivamente i loro massimi fattori quadrati, potremo porre:

$$a_1 = \alpha_1 \sqrt{\lambda}\,, \qquad a_2 = \alpha_2 \sqrt{\mu}\,, \qquad c_1 = \gamma_1 \sqrt{\nu}\,, \qquad d_1 = \delta_1 \sqrt{\tau}\,,$$

essendo λ, μ, ν, τ interi, positivi e privi di fattori quadrati. Ciascuno dei sei numeri

$$\sqrt{pq\lambda\mu}\,,\ \sqrt{pr\mu\nu}\,,\ \sqrt{ps\mu\tau}\,,\ \sqrt{qr\lambda\nu}\,,\ \sqrt{qs\lambda\tau}\,,\ \sqrt{rs\nu\tau}$$

dovrà allora risultare intero.

§ 2.

« Supponiamo dapprima che p, q, r, s *siano numeri primi differenti*. Perchè $\sqrt{pq\lambda\mu}$ riesca intero, occorre che ciascuno dei numeri p, q o divida λ, o divida μ, nè può dividerli simultaneamente, che altrimenti, essendo λ, μ privi di fattori quadrati, resterebbe in $\sqrt{pq\lambda\mu}$ l'irrazionalità $\sqrt{p}$ o l'altra $\sqrt{q}$.

« Potremo quindi distinguere i quattro casi seguenti:

A) p e q dividono μ,
B) p divide λ, q divide μ,
C) p divide μ, q divide λ,
D) p e q dividono λ.

« Consideriamo ad esempio il caso A). Avremo

$$\mu = pq\,\mu',$$

con μ' intero e dovendo essere $\sqrt{\lambda\,\mu'}$ intero, mentre λ, μ non hanno fattori quadrati, sarà $\mu' = \lambda$, cioè

$$\mu = pq\,\lambda.$$

Dovendo poi i tre numeri

$$\sqrt{qr\,\lambda\nu}, \quad \sqrt{qs\,\lambda\tau}, \quad \sqrt{rs\,\nu\tau}$$

risultare interi, dovrà q, che non divide λ, dividere ν e τ; se poniamo

$$\nu = q\,\nu'\,, \quad \tau = q\,\tau',$$

dovranno essere

$$\sqrt{r\,\lambda\nu'}, \quad \sqrt{s\,\lambda\tau'}$$

interi, quindi r dividerà λ ovvero ν'.

« Se r divide ν', avremo

$$\nu' = r\lambda,$$

indi

$$\mu = pq\lambda, \quad \nu = qr\lambda, \quad \tau = q\tau'$$

e i numeri λ, τ', a causa di

$$a_1^2 + a_2^2 + c_1^2 - d_1^2 = \lambda\,(\alpha_1^2 + pq\ \alpha_2^2 + qr\,\gamma_1^2) - q\,\tau'\,\delta_1^2 = 1,$$

saranno primi fra loro. Per ciò, essendo

$$\sqrt{s\lambda\tau'}$$

intero, avremo necessariamente

$$\lambda = 1\,, \quad \tau' = s,$$

ovvero

$$\lambda = s, \quad \tau' = 1,$$

cioè rispettivamente

$$\lambda = 1, \quad \mu = pq, \quad \nu = qr, \quad \tau = qs,$$

ovvero

$$\lambda = s \quad \mu = pqs, \quad \nu = qrs, \quad \tau = q.$$

« Se r divide λ, sarà

$$\lambda = r\nu'$$

ed r dividerà conseguentemente anche τ'. Poniamo

$$\tau' = r\tau'',$$

dopo di che, dovendo $\sqrt{s\nu'\tau''}$ risultare intero con ν', τ'' primi fra loro, avremo

$$\nu' = 1 \quad \tau'' = s$$

ovvero

$$\nu' = s \quad \tau'' = 1,$$

onde i due nuovi casi

$$\lambda = r, \quad \mu = pqr, \quad \nu = q, \quad \tau = qrs$$
$$\lambda = rs, \quad \mu = pqrs, \quad \nu = qs, \quad \tau = qr.$$

« Nello stesso modo si vedrà che ciascuno degli altri tre casi B) C) D) dà luogo a quattro sottocasi, che riuniamo nella tabella seguente:

$$\text{A)}\left\{\begin{array}{llll} \lambda = 1\,, & \mu = pq\,, & \nu = qr\,, & \tau = qs\,, \\ \lambda = s\,, & \mu = pqs\,, & \nu = qrs\,, & \tau = q\,, \\ \lambda = r\,, & \mu = pqr\,, & \nu = q\,, & \tau = qrs\,, \\ \lambda = rs\,, & \mu = pqrs, & \nu = qs\,, & \tau = qr\,, \end{array}\right.$$

$$\text{B)}\left\{\begin{array}{llll} \lambda = p\,, & \mu = q\,, & \nu = pqr\,, & \tau = pqs\,, \\ \lambda = ps\,, & \mu = qs\,, & \nu = pqrs, & \tau = pq\,, \\ \lambda = pr\,, & \mu = qr\,, & \nu = pq\,, & \tau = pqrs, \\ \lambda = prs\,, & \mu = qrs\,, & \nu = pqs\,, & \tau = pqr\,, \end{array}\right.$$

$$
\text{C)}\quad \begin{cases}
\lambda = qr \ , & \mu = pr \ , & \nu = 1 \ , & \tau = rs \ , \\
\lambda = qrs \ , & \mu = prs \ , & \nu = s \ , & \tau = r \ , \\
\lambda = q \ , & \mu = p \ , & \nu = r \ , & \tau = s \ , \\
\lambda = qs \ , & \mu = ps \ , & \nu = rs \ , & \tau = 1 \ ,
\end{cases}
$$

$$
\text{D)}\quad \begin{cases}
\lambda = pqrs \ , & \mu = rs \ , & \nu = ps \ , & \tau = pr \ , \\
\lambda = pqr \ , & \mu = r \ , & \nu = p \ , & \tau = prs \ , \\
\lambda = pq \ , & \mu = 1 \ , & \nu = pr \ , & \tau = ps \ , \\
\lambda = pqs \ , & \mu = s \ , & \nu = prs \ , & \tau = p \ .
\end{cases}
$$

« Viceversa, se λ, μ, ν, τ hanno i valori di uno dei 16 sistemi forniti da questa tabella e α_1, α_2, γ_1, δ_1, sono numeri interi, che soddisfano la relazione

$$\lambda\alpha_1^2 + \mu\alpha_2^2 + \nu\gamma_1^2 - \tau\delta_1^2 = 1,$$

la riflessione

$$z' = \frac{(\alpha_1\sqrt{\lambda} + i\alpha_2\sqrt{\mu})\, z_0 + (i\gamma_1\sqrt{\nu} + i\delta_1\sqrt{\tau})}{(i\gamma_1\sqrt{\nu} - i\delta_1\sqrt{\tau})\, z_0 + (\alpha_1\sqrt{\lambda} - i\alpha_2\sqrt{\mu})}$$

appartiene, come subito si vede, al gruppo Γ.

§ 3.

« Se scriviamo le riflessioni (6) corrispondenti ai 16 tipi sopra trovati, avvertendo di moltiplicare per i i quattro coefficienti di quelle che provengono dai tipi B) D) (sicchè queste sostituzioni vengono ad acquistare il determinante -1), per esse e per tutte le sostituzioni di 1ª o 2ª specie, che ne risultano per combinazione, si riscontreranno le leggi di formazione che andiamo a descrivere.

« Indichiamo con lettere ordinarie maiuscole i numeri della forma

$$(\mathrm{M})\quad m + in\sqrt{pq},$$

essendo m, n razionali interi, con lettere greche i numeri della forma

$$(\mathrm{M}')\quad m\sqrt{q} + in\sqrt{p}.$$

« Le indicate sostituzioni apparteranno allora ad uno degli 8 tipi seguenti [1]:

$$
\text{I)}\begin{pmatrix} \mathrm{A} + \sqrt{rs}\,\mathrm{B}\ , & \sqrt{r}\alpha + \sqrt{s}\,\beta \\ -\sqrt{r}\alpha_0 + \sqrt{s}\,\beta_0\ , & \mathrm{A}_0 - \sqrt{rs}\,\mathrm{B}_0 \end{pmatrix},\quad
\text{II)}\begin{pmatrix} \mathrm{A} + \sqrt{rs}\,\mathrm{B}\ , & \sqrt{r}\alpha + \sqrt{s}\,\beta \\ \sqrt{r}\alpha_0 - \sqrt{s}\,\beta_0\ , & -\mathrm{A}_0 + \sqrt{rs}\,\mathrm{B}_0 \end{pmatrix}
$$

$$
\text{III)}\begin{pmatrix} \alpha + \sqrt{rs}\,\beta\ , & \sqrt{r}\mathrm{A} + \sqrt{s}\,\mathrm{B} \\ -\sqrt{r}\mathrm{A}_0 + \sqrt{s}\,\mathrm{B}_0, & \alpha_0 - \sqrt{rs}\,\beta_0 \end{pmatrix},\quad
\text{IV)}\begin{pmatrix} \alpha + \sqrt{rs}\,\beta\ , & \sqrt{r}\mathrm{A} + \sqrt{s}\,\mathrm{B} \\ \sqrt{r}\mathrm{A}_0 - \sqrt{s}\,\mathrm{B}_0\ , & -\alpha_0 + \sqrt{rs}\,\beta_0 \end{pmatrix}
$$

$$
\text{V)}\begin{pmatrix} \sqrt{r}\,\mathrm{A} + \sqrt{s}\mathrm{B}, & \alpha + \sqrt{rs}\,\beta \\ \alpha_0 - \sqrt{rs}\,\beta_0\ , & -\sqrt{r}\mathrm{A}_0 + \sqrt{s}\,\mathrm{B}_0 \end{pmatrix},\quad
\text{VI)}\begin{pmatrix} \sqrt{r}\,\mathrm{A} + \sqrt{s}\,\mathrm{B}\ , & \alpha + \sqrt{rs}\,\beta \\ -\alpha_0 + \sqrt{rs}\,\beta_0\ , & \sqrt{r}\mathrm{A}_0 - \sqrt{s}\,\mathrm{B}_0 \end{pmatrix}
$$

$$
\text{VII)}\begin{pmatrix} \sqrt{r}\alpha + \sqrt{s}\,\beta\ , & \mathrm{A} + \sqrt{rs}\,\mathrm{B} \\ \mathrm{A}_0 - \sqrt{rs}\,\mathrm{B}_0\ , & -\sqrt{r}\alpha_0 + \sqrt{s}\,\beta_0 \end{pmatrix},\quad
\text{VIII)}\begin{pmatrix} \sqrt{r}\alpha + \sqrt{s}\,\beta\ , & \mathrm{A} + \sqrt{rs}\,\mathrm{B} \\ -\mathrm{A}_0 + \sqrt{rs}\mathrm{B}_0, & \sqrt{r}\alpha_0 + \sqrt{s}\,\beta_0 \end{pmatrix}.
$$

[1] Coll'apposizione dell'indice 0 ad una quantità complessa ne indichiamo, al modo di Hermite, la coniugata.

« Ora, se consideriamo tutte le possibili sostituzioni di 1ª e 2ª specie, col determinante ± 1, appartenenti ad uno di questi 8 tipi, potremo facilmente constatare che esse formano un gruppo, che indicheremo con H. Basta per ciò osservare che il prodotto di due numeri del modulo (M) o di due numeri del modulo (M′) è un numero in (M), mentre il prodotto di un numero di (M) per un numero di (M′) appartiene ad (M′), dopo di che si vede subito che le dette sostituzioni formano effettivamente un gruppo. Di più si vede che il tipo della sostituzione composta dipende unicamente dai tipi, cui appartengono le due sostituzioni componenti, secondo la legge espressa dalla tavola seguente, costruita al modo della tavola pitagorica:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
II	I	IV	III	VI	V	VIII	VII
III	IV	I	II	VII	VIII	V	VI
IV	III	II	I	VIII	VII	VI	V
V	VI	VII	VIII	I	II	III	IV
VI	V	VIII	VII	II	I	IV	III
VII	VIII	V	VI	III	IV	I	II
VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I

« Di qui si desume p. e. che le sostituzioni dei primi quattro tipi formano di per sè un sottogruppo eccezionale in H.

« Cangiando le sostituzioni del gruppo H sopra definito in sostituzioni quaternarie, secondo il § 1, si vede subito che queste appartengono tutte al gruppo G, cioè sono congrue coll'identità (mod. 2). È chiaro quindi che H o coincide con Γ o ne è un sottogruppo; in ogni caso esso ne contiene tutte le riflessioni e non ne contiene altre, e però contiene Γ', il quale è sottogruppo eccezionale sì in H che in Γ. Quando si possa fissare il poliedro fondamentale di H, limitato da sole sfere di riflessione, è facile risalire da H agli altri gruppi considerati (Cf. M. A).

§ 4.

« Fino ad ora abbiamo supposto i numeri primi p, q, r, s differenti. Se alcuni di essi diventano eguali fra loro, ne risulta modificata la costituzione del gruppo H, ma in ogni caso il metodo esposto è ancora applicabile. E qui, fra i casi possibili, ne considererò ancora alcuni, che conducono a gruppi di maggiore interesse.

« Supponiamo in primo luogo che sia soltanto $q = p$ e si tratti dunque del gruppo riproduttivo della forma quaternaria

$$f = p\,(x_1^2 + x_2^2) + r x_3^2 - s x_4^2\,,$$

con p, r, s numeri primi diversi. Riprendendo la discussione del § 2, si vedrà immediatamente che deve essere

$$\mu = \lambda$$

e successivamente si troveranno per λ, μ, ν, τ i seguenti 8 sistemi di valori:

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} \lambda = \mu = 1 \;, & \nu = pr \;, \quad \tau = ps \\ \lambda = \mu = s \;, & \nu = prs \;, \quad \tau = p \end{cases}$$

$$\text{(B)} \quad \begin{cases} \lambda = \mu = p \;, & \nu = r \;, \quad \tau = s \\ \lambda = \mu = ps \;, & \nu = rs \;, \quad \tau = 1 \end{cases}$$

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} \lambda = \mu = r \;, & \nu = p \;, \quad \tau = prs \\ \lambda = \mu = rs \;, & \nu = ps \;, \quad \tau = pr \end{cases}$$

$$\text{(D)} \quad \begin{cases} \lambda = \mu = pr \;, & \nu = 1 \;, \quad \tau = rs \\ \lambda = \mu = prs \;, & \nu = s \;, \quad \tau = r\,. \end{cases}$$

« Scrivendo le corrispondenti riflessioni, col moltiplicare per i i coefficienti di quelle dei tipi C), D), si vedrà che queste sostituzioni e quelle che ne derivano per composizione appartengono al gruppo H, che andiamo ora a definire.

« Indichiamo qui con lettere maiuscole ordinarie i numeri della forma

$$\text{(P)} \qquad a + b\sqrt{rs}$$

con lettere greche i numeri della forma

$$\text{(P')} \qquad a\sqrt{r} + b\sqrt{s}\,,$$

dove attualmente a, b indicano interi complessi di Gauss. Essendo poi A, α due numeri qualunque in (P), (P') rispettivamente, indichiamo con

$$\overline{\mathrm{A}},\ \overline{\alpha}$$

il numero della medesima specie che ne risulta cangiando i in $-i$ e contemporaneamente $\sqrt{r}$ in $-\sqrt{r}$. Allora le sostituzioni di 1ª e 2ª specie, a determinante ± 1, appartenenti ad uno dei quattro tipi seguenti

$$\text{I)} \begin{pmatrix} \mathrm{A} & , \sqrt{p}\,\alpha \\ \sqrt{p}\,\overline{\alpha}, & \overline{\mathrm{A}} \end{pmatrix} \quad , \quad \text{II)} \begin{pmatrix} \alpha & , \sqrt{p}\,\mathrm{A} \\ \sqrt{p}\,\overline{\mathrm{A}}\;, & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\text{III)} \begin{pmatrix} \sqrt{p}\,\mathrm{A}\,, & \alpha \\ \overline{\alpha} & , \sqrt{p}\,\overline{\mathrm{A}} \end{pmatrix} \quad , \quad \text{IV)} \begin{pmatrix} \sqrt{p}\,\alpha\,, & \mathrm{A} \\ \overline{\mathrm{A}} & , \sqrt{p}\,\overline{\alpha} \end{pmatrix}$$

formano il gruppo H in questione.

« Che esse costituiscano un gruppo risulta ancora dall'osservare che il prodotto di due numeri appartenenti simultaneamente a (P) o a (P′) è un numero di (P), mentre il prodotto di un numero di (P) per un numero di (P′) è contenuto in (P′). Anche qui il tipo della sostituzione composta dipende solo dai tipi delle sostituzioni componenti, secondo la semplice legge espressa nella tavola:

I	II	III	IV
II	I	IV	III
III	IV	I	II
IV	III	II	I

« D'altronde, come nel caso generale, H è un sottogruppo di Γ, col quale ha a comune tutte le riflessioni.

§ 5.

« Consideriamo in fine i due casi seguenti, che conducono a gruppi già studiati direttamente nei miei lavori citati.

« Supponiamo dapprima $q = r = 1$, indi

$$f = px_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - sx_4^2,$$

con p, s numeri primi diversi. Dai risultati generali dei §§ 2, 3, o dalla discussione diretta, si vedrà che λ, μ, ν, τ possono assumere i quattro sistemi di valori:

$$\begin{cases} \lambda = \nu = 1 \ , & \mu = p \ , & \tau = s \\ \lambda = \nu = s \ , & \mu = ps \ , & \tau = 1 \\ \lambda = \nu = p \ , & \mu = 1 \ , & \tau = ps \\ \lambda = \nu = ps \ , & \mu = s \ , & \tau = p \ . \end{cases}$$

« Il gruppo H a cui siamo così condotti consta in questo caso delle sostituzioni di 1ª e 2ª specie, a determinante ± 1, di una delle due forme

$$\mathrm{I)} \begin{pmatrix} a + b\sqrt{s} & , c + d\sqrt{s} \\ -c_0 + d_0\sqrt{s} & , a_0 - b_0\sqrt{s} \end{pmatrix} \ , \quad \mathrm{II)} \begin{pmatrix} a + b\sqrt{s} & , & c + d\sqrt{s} \\ c_0 - d_0\sqrt{s} & , & -a_0 + b_0\sqrt{s} \end{pmatrix}$$

essendo a, b, c, d interi complessi della forma

$$m + in\sqrt{p}$$

(Cfr. M. A. § 6).

« Da ultimo consideriamo le forme quaternarie

$$f = x_1^2 + q\,(x_2^2 + x_3^2) - x_4^2,$$

ove q sia un numero primo o composto, ma in ogni caso privo di fattori quadrati. La discussione del § 2 ci prova subito che qui si ha

$$\nu = \lambda, \quad \tau = \mu$$

essendo λ, μ privi fra loro e, poichè

$$\sqrt{q\lambda\mu}$$

deve essere intero, avremo

$$q = \lambda\mu.$$

« Viceversa, essendo

$$q = q' q''$$

una qualunque decomposizione di q in due fattori, potremo fare

$$\lambda = \nu = q' \,, \; \mu = \tau = q'' .$$

« Il gruppo H da considerarsi è in questo caso composto delle sostituzioni di 1ª e 2ª specie, a determinante $+1$, della forma

$$\begin{pmatrix} a\sqrt{\lambda} + b\sqrt{\frac{q}{\lambda}} \,, & c\sqrt{\lambda} + d\sqrt{\frac{q}{\lambda}} \\ -\bar{c}\sqrt{\lambda} + \bar{d}\sqrt{\frac{q}{\lambda}} \,, & \bar{a}\sqrt{\lambda} - \bar{b}\sqrt{\frac{q}{\lambda}} \end{pmatrix},$$

dove a, b, c, d sono interi complessi di Gauss e λ percorre tutti i divisori di q. Se q è il prodotto di n fattori primi, abbiamo così 2^n tipi di sostituzioni, sulle quali si verificherà subito la proprietà di formare gruppo.

« La ristrettezza dello spazio non mi consente qui di fare seguire la definizione dei nuovi gruppi da esempî effettivi di determinazione dei loro poliedri fondamentali. Il lettore potrà a tale oggetto consultare la mia Memoria negli Annali di Matematica ».

Matematica. — *Sulle equazioni alle differenze.* Nota del Corrispondente S. Pincherle.

« La presente Nota ha origine da uno studio suggeritomi da benevoli comunicazioni epistolari del ch. prof. Hermite. Nelle sue ricerche sulla generalizzazione dell'algoritmo delle frazioni continue, si sono presentate all'insigne analista delle equazioni alle differenze del secondo ordine, i cui coefficienti contengono linearmente un parametro x, e di cui un integrale è costituito da un sistema di polinomî in x di grado costante. Ciò mi ha condotto a cercare le condizioni affinchè una equazione data alle differenze dell'ordine r, ammetta s integrali ($s < r$) di grado costante in x e più particolarmente indipendenti da x.

« In tale ricerca mi si è presentato così spontaneo e luminoso il concetto di divisione e divisibilità delle espressioni lineari alle differenze da