ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCXCI.

1894

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME III.

1° SEMESTRE

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1894

finissima interruzione per le scintille a metà dell'argentatura. I due specchi parabolici, nelle cui linee focali sono posti l'oscillatore ed il risonatore, sono naturalmente assai piccoli, specialmente il secondo, il quale può essere contenuto nella mano quasi chiusa.

« Gli effetti sono sensibili sino a quasi mezzo metro di distanza fra oscillatore e risonatore. L'esperienza dei nodi e ventri fissi che si formano per riflessione normale su una lastra metallica riesce benissimo, e così pure la riflessione obbliqua, la rifrazione in un prisma di paraffina ecc. Il corpo riflettente può essere piccolissimo, per esempio può non essere altro che una moneta da dieci centesmi; il prisma può essere grande come quelli adoperati nelle esperienze dell'ottica ordinaria.

« 2. Da esperienze narrate nelle due ultime delle citate Note risultava una curiosa anomalia, in riguardo alla riflessione delle oscillazioni elettriche. Contrariamente a ciò che fa prevedere la teoria elettromagnetica, ed in opposizione a ciò che verificai nel caso della riflessione su dielettrici, trovai, che quando le radiazioni elettriche si riflettono sui metalli, esse perdono più in intensità allorchè prima della riflessione sono perpendicolari al piano d'incidenza, che allorquando sono invece contenute in questo piano. Le modificazioni introdotte nella costruzione degli oscillatori, mi hanno permesso di semplificare e rendere più comodo l'apparato che serve a studiare questi fenomeni, cosicchè ho potuto fare molte esperienze in condizioni variate. Dapprima ho potuto riconoscere che il comportamento anormale dei metalli ha luogo solo quando l'angolo d'incidenza supera un certo valore; poi ho potuto trovarne la causa, la quale consiste in certi fenomeni d'interferenza che si producono fra le radiazioni riflesse dalla lastra metallica e le radiazioni che direttamente possono giungere dall'oscillatore al risonatore. Più è grande l'incidenza e più difficile è il togliere la causa di errore, stante l'obbligo di non allungare troppo il cammino delle radiazioni. Ad ogni modo ho potuto constatare che sino oltre l'incidenza di 78° i metalli si comportano nel modo voluto dalla teoria, cosicchè non può rimanere nessun dubbio intorno alla perpendicolarità fra il piano di polarizzazione delle radiazioni elettriche, e la direzione della forza elettrica ».

Fisica. — *Alcune osservazioni sulla teoria dei motori elettrici.* Nota del Corrispondente G. B. Favero.

Parte I. — *Preliminari* - *Motore Thomson-Brown.*

« *Preliminari.* — Il prof. Galileo Ferraris in una recente pregiatissima Memoria, letta all'Accademia delle scienze di Torino nel Decembre 1893, presentò un suo metodo di interpretazione ed esposizione elementare delle proprietà fondamentali di molti apparecchi elettrotecnici, fondato sulla considerazione dei vettori rotanti ed alternativi.

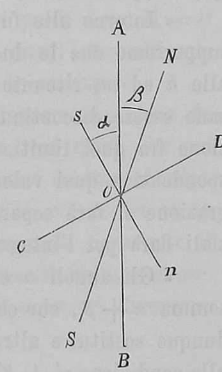
« Il metodo del prof. Ferraris si presta, come egli stesso osserva, non solo all'interpretazione di apparecchi esistenti, ma mette anche in evidenza la possibilità di nuove combinazioni. Ed infatti in una susseguente nota del 1° Aprile 1894, presentata alla stessa Accademia, egli fa uso del suo metodo per la trattazione di un nuovo motore elettrico sincrono a corrente alternativa, da lui ideato.

« Il pregio del metodo proposto dal prof. Ferraris apparisce maggiormente qualora si osservi come spesso la trattazione puramente analitica dell'argomento presenti aspetto molto complicato ([1]); ed è quindi desiderabile, che la teoria di questi apparecchi elettrici, che vanno acquistando importanza sempre maggiore, e che attirano tanto potentemente l'attenzione sia degli uomini di scienza, che del mondo industriale, venga resa, per quanto lo comporta l'argomento, facile e piana.

« Però nel metodo del Ferraris la frequente suddivisione in più vettori, od in più correnti o più flussi, dove nella realtà non esiste che un ente unico, sebbene giovi a facilitare l'intelligenza dei fenomeni, non dispensa dal ricorrere all'analisi, quando si tratti della valutazione quantitativa dei fenomeni stessi.

« Questa considerazione diede origine alla nota presente, il cui scopo sarebbe di far vedere, che anche restando nel solo campo dell'analisi, le questioni relative a questi apparecchi elettrotecnici possono essere presentate sotto forma abbastanza elementare; e che anche il metodo puramente analitico si presta a delle considerazioni che possono condurre a nuove combinazioni.

« Se in un campo magnetico di direzione NS sia collocato un magnete ns, girevole intorno ad un asse O, normale alla figura, l'azione del campo sui poli n, s produrrà un momento M di rotazione del magnete intorno all'asse O, che dipenderà dalla intensità h del campo, dal momento m del magnete, e dall'angolo che la direzione del magnete forma colla direzione del campo. Considereremo come positiva la rotazione quando avvenga, per chi osserva la figura, nel senso degli indici d'un orologio.



« Se AB indichi una direzione fissa, posti gli angoli $AOs = \alpha$, $AON = \beta$, il momento di rotazione sarà dato da

$$M = hm \operatorname{sen} (\alpha + \beta)$$

([1]) Vedi per es. i notevoli lavori dei sigg. M. Hutin ed M. Leblanc, *La Lumière Électrique*, vol. XL (1891), p. 201 e sgg., e di A. ed I. Boissonas, ib. vol. L (1893), p. 109.

« Supponiamo ora che l'intensità h, il momento m, e gli angoli α e β, sieno variabili col tempo t. Il momento M sarà allora anch'esso variabile col tempo, e potranno studiarsi i diversi valori che esso va assumendo. Se si considerano quelli che esso assume da $t = t_0$ fino a $t = t_1$, se ne potrà calcolare il valore medio colla formola

$$M_m = \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} M \, dt$$

« Se i due valori dell'angolo α corrispondente ai tempi t_0 e t_1 sono fra loro diversi, il magnete nell'intervallo di tempo da t_0 a t_1 sarà passato da una ad un'altra posizione rispetto alla AB, e se il momento medio M_m per quell'intervallo è diverso da zero, al movimento del magnete corrisponderà un'energia. Tale energia potrà essere trasmessa da enti esterni al magnete; o dal magnete ad enti esterni, e potrà manifestarsi come lavoro compiuto, come calore sviluppato e simili. Può dirsi nel primo caso che l'apparecchio funziona come una dinamo, nel secondo come un motore. Valutando tale energia sotto la forma di lavoro, il suo valore medio L nell'unità di tempo, durante l'intervallo da t_0 a t_1, sarà espresso da

$$L = \frac{1}{t_0 - t_1} \int_{t_0}^{t_1} M \frac{d\alpha}{dt} \, dt$$

Se conservando la funzione del tempo α, si possono cambiare le altre funzioni in modo, che M cambi di segno per ogni valore di t, allora anche M_m ed L cambieranno di segno. Il passaggio di energia si compierà allora in senso inverso: in altre parole l'apparecchio da dinamo diventa motore o viceversa. Quando possa avvenire tale cambiamento l'apparecchio sarà invertibile.

« Intorno alle funzioni del tempo h, m, α, β (naturalmente tutte reali) supporremo che le due ultime siano funzioni finite e continue; ma quanto alle h ed m, ritenuto sempre che siano finite, ammetteremo anche che possano essere discontinue entro i limiti t_0 e t_1. Per fare in tal caso l'integrazione fra quei limiti, bisognerà suddividere l'intervallo in varie parti, corrispondenti a quei valori di t, per i quali ha luogo la discontinuità, e l'integrazione si farà separatamente per ogni parte: la somma degl'integrali parziali darà poi l'integrale totale.

« Gli angoli α e β non entrano nei valori di M ed M_m che colla loro somma $\alpha + \beta$, che chiameremo γ. Alle funzioni del tempo α e β si possono dunque sostituire altre due funzioni α', β' qualunque, purchè esse soddisfino alla condizione $\alpha' + \beta' = \alpha + \beta = \gamma$. Ne viene che, considerando l'apparecchio in sè stesso, si può dire essere indifferente che la β varii o meno col tempo, purchè la α si scelga tale che $\alpha + \beta = \gamma$: in altre parole è indifferente che il campo magnetico, la cui direzione è data dall'angolo β, mantenga o meno inalterata tale direzione rispetto alla retta fissa AB, purchè si mantenga la legge con cui varia la somma γ. Per quanto dunque riguarda i valori di M ed M_m diventa accessorio che il campo magnetico sia rotatorio o meno: ad ogni dinamo o motore a campo magnetico fisso, corrisponde quindi una dinamo o motore a campo magnetico rotatorio e viceversa. Naturalmente queste osservazioni non si estendono al valore di L, e resta tacitamente inteso che le funzioni del tempo h ed m o non dipendono da α e β, o dipendono dalla loro somma $\alpha + \beta$.

« Esaminiamo ora più particolarmente i valori di M e di M_m entro l'intervallo da t_0 a t_1. Il momento M, considerato come funzione di t avrà in generale valori positivi, valori negativi e valori nulli. Si potrà dunque suddividere l'intervallo da t_0 a t_1 in intervalli minori, entro alcuni dei quali la M sarà positiva, entro altri sarà negativa. Si potrà allora considerare il valore medio di M, relativo a ciascun intervallo minore, e valutare il lavoro che vi corrisponde. Se per gl'intervalli minori per i quali M ha un dato segno, l'energia passa ad enti esterni, per gl'intervalli dell'altro segno essa passerà invece dagli agenti esterni all'apparecchio. Dipenderà naturalmente dalla prevalenza di una specie di energia sull'altra, entro l'intervallo totale da t_0 a t_1 il determinare se l'apparecchio, per tale intervallo complessivo funziona come dinamo o come motore.

« Questa prevalenza dell'una specie di energia sull'altra viene stabilita del segno del valore medio M_m, calcolato per intervallo complessivo. Se M_m è nullo entro tale intervallo, le due specie di energia si neutralizzano, ed al movimento del magnete non corrisponde alcun passaggio complessivo di energia.

« Quando vi ha prevalenza di una specie di energia sull'altra, ma la M da t_0 a t_1 sia talvolta di un segno talvolta dell'altro, e trattisi di trasformare l'energia corrispondente in lavoro, bisognerà introdurre delle masse, che facciano l'ufficio di volante, per superare non solo i punti dove $M = 0$ (e che possono chiamarsi i punti morti), ma più ancora quegl'intervalli minori, dove M ha un segno opposto al lavoro che si vuole realizzare.

« Il campo magnetico può risultare sia da magneti permanenti, sia da elettro-magneti. Anche il magnete ns si può ottenere in vari modi, fra cui è specialmente notevole quello dipendente da circuiti percorsi da correnti elettriche. È noto infatti che un circuito circolare elettrico CD, col centro in O, ed il cui piano sia normale ad ns, equivale ad un magnete ns avente il momento $m = \mathrm{A}i$, dove A è l'area del circolo ed i l'intensità della corrente. Posto allora AOD $= \varphi$ sarà $\alpha + \varphi = 90^\circ$, e le formole superiori diventano

$$a) \qquad \mathrm{M} = \mathrm{A}hi \cos(\varphi - \beta)\,, \quad \mathrm{M}_m = \frac{\mathrm{A}}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} hi \cos(\varphi - \beta)\, dt\,,$$

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{A}}{t_1 - t_0}\int_{t_0}^{t_1} hi \cos(\varphi - \beta)\,\frac{d\varphi}{dt}\,.\,dt$$

Se si abbiano più campi magnetici e più circuiti CD posti in piani qualunque passanti per l'asse O, od anche non passanti, ma ruotanti intorno ad esso, le azioni loro per la valutazione delle quantità complessive M, M_m, L dovranno sommarsi, tenuto conto ben inteso delle influenze reciproche dei campi e delle correnti. Naturalmente il calcolo in questo caso può diventare assai più complesso, ma la natura delle considerazioni generali precedenti rimane inalterata.

« Speciale attenzione meritano quei casi in cui le h ed i sono funzioni periodiche del tempo, mentre la φ cresce continuamente (o diminuisce) col tempo stesso.

« Questi casi comprendono in generale le dinamo ed i motori elettrici, intorno alle quali macchine ferve attualmente lo studio sia nel campo teorico che nel campo pratico.

« Alle considerazioni generali sopra esposte aggiungeremo ora l'esame di qualche particolare apparecchio.

« *Motore Thomson-Brown.* — Sul motore Thomson-Brown furono già pubblicate importanti ricerche [1]. Il breve studio che qui si espone contribuirà forse a meglio conoscerne il funzionamento. Il campo magnetico per questo motore è fisso di direzione, bipolare, ed è generato da una corrente alternante ordinaria. Nelle spirali dell'armatura circolano le correnti indotte dal campo. Volendo ridurre il concetto teorico del motore Thomson-Brown alla sua più semplice espressione, supporremo un solo circuito CD, percorso dalla corrente che in esso viene indotta durante il suo movimento nel campo magnetico.

« Il campo essendo fisso, porremo $\beta = 0$, e per rappresentarne l'alternazione scriveremo al solito

$$h = \mathrm{H} \operatorname{sen} \omega t$$

dove H è il valore massimo positivo del campo, ed $\omega = \frac{2\pi}{\mathrm{T}}$, essendo T la durata dell'alternazione. Supporremo inoltre che il circuito ruoti intorno all'asse O nel senso positivo con velocità angolare ω_1 costante, e che al tempo $t = 0$, l'angolo φ abbia il valore φ_0. Dovremo allora porre $\varphi = \varphi_0 + \omega_1 t$, ed avremo così

$$\mathrm{M} = \mathrm{AH}i \operatorname{sen} \omega t \cos (\varphi_0 + \omega_1 t)$$

Per trovare il valore della corrente i indotta nel circuito CD, chiamando l il coefficiente di auto-induzione del circuito, ed r la sua resistenza ohmica si avrà

$$b) \qquad ri = \mathrm{E} - l \frac{di}{dt}$$

(1) Vedi I. Sahulka, Elektrotechnische Zeitschrift. 7 Iuli 1893, pag. 391, oltre la Memoria sopra citata del prof. Ferraris.

La forza elettromotrice E si dedurrà dal flusso magnetico Φ. Tenuto conto delle note leggi dell'induzione, e del senso positivo sopra assunto per la rotazione, dovremo porre

$$E = -\frac{d\Phi}{dt}$$

essendo $\Phi = \mathrm{A}h \operatorname{sen} \varphi$. Fatta la derivazione di Φ rispetto al tempo, ed ottenuta così la forza elettromotrice E, si potrà sostituirla nella b), e si avrà un'equazione differenziale lineare di primo grado fra i e t, integrabile coi soliti metodi. Fatta l'integrazione colla condizione che per $t = 0$, sia $i = 0$, si trova

$$i = \frac{\mathrm{AH}}{2l} \left\{ \mathrm{F}(t) - e^{-\frac{rt}{l}} \mathrm{F}(o) \right\}$$

dove per brevità si è posta la funzione del tempo

$$\mathrm{F}(t) = \cos\psi \cos \left\{ (\omega + \omega_1)\, t + \psi + \varphi_0 \right\} - \cos\psi_1 \cos \left\{ (\omega - \omega_1)\, t + \psi_1 - \varphi_0 \right\}$$

Gli angoli ψ e ψ_1, compresi fra O e π, sono dati dalle equazioni

$$\lambda \operatorname{sen} \psi = \lambda_1 \operatorname{sen} \psi_1 = \frac{r}{l},\ \lambda \cos \psi = \omega + \omega_1,\ \lambda_1 \cos \psi_1 = \omega - \omega_1$$

le quali determinano pure λ e λ_1, che debbono intendersi positive. Col decorrere del tempo il fattore $e^{-\frac{rt}{l}}$ tende ad annullarsi, ed abbiamo per lo stato di regime

$$i = \frac{\mathrm{AHF}(t)}{2l}$$

per cui il momento diventa

$$b') \qquad \mathrm{M} = \frac{\mathrm{A}^2\, \mathrm{H}^2}{2l}\, \mathrm{F}(t) \operatorname{sen} \omega t \cos (\varphi_0 + \omega_1 t).$$

« Come si vede il momento M dipende dal prodotto dei tre fattori, funzioni del tempo, $\mathrm{F}(t)$, $\operatorname{sen} \omega t$, $\cos (\varphi_0 + \omega_1 t) = 0$. Esso si annullerà quindi ogni volta che uno di questi fattori si annulla, e siccome le tre equazioni $\mathrm{F}(t) = 0$, $\operatorname{sen} \omega t = 0$, $\cos (\varphi_0 + \omega_1 t) = 0$ hanno ciascuna infinite radici, così col crescere indefinito del tempo, il momento M si annullerà infinite volte; ed essendo generalmente le radici semplici, e la funzione M continua, il momento passerà alternatamente da valori di un segno a valori di segno opposto. Gl'intervalli di tempo in cui esso si annulla per l'annullarsi del fattore $\operatorname{sen} \omega t$ sono fra loro eguali: così pure quelli per l'annullarsi del fattore $\cos (\varphi_0 + \omega_1 t)$. All'annullarsi di quest'ultimo fattore corrisponde una posizione determinata del circuito rispetto al campo magnetico, quella in cui l'angolo φ acquista il valore $\frac{(2k + 1)\pi}{2}$, essendo k un numero intero;

cioè il momento è sempre nullo quando il piano del circuito è normale alla direzione del campo. Quanto all'annullarsi di M per l'annullarsi del fattore $F(t)$, ossia dell'intensità i, esso ha luogo periodicamente soltanto nel caso, che i numeri ω ed ω_1 siano fra loro commensurabili, come facilmente si deduce esaminando i valori di t, che rendono $F(t) = 0$.

« Avendo il momento M valori positivi e valori negativi, si presenta la questione, in quali condizioni vi sia prevalenza degli uni sugli altri durante un dato intervallo di tempo. Trattasi allora di valutare la media M_m per tale intervallo. Partendo dall'origine del tempo porremo $t = 0$ ed avremo

$$M_m = \frac{1}{t_1}\int_0^{t_1} M dt$$

« Risolvendo i prodotti di seni e coseni contenuti in M in somme e differenze, e separando poi i termini contenenti il tempo da quelli che ne sono privi, si ottiene facilmente il valore di M così espresso

$$M = \frac{A^2H^2}{16\,l}(\operatorname{sen} 2\psi_1 - \operatorname{sen} 2\psi) + \Sigma\, B \operatorname{sen}(\mu\, t + \nu)$$

raccogliendo sotto il segno sommatorio Σ il gruppo di termini contenenti il tempo. Questa espressione di M vale qualunque sia il valore di ω_1, ad eccezione del valore $\omega_1 = 0$, per il quale si ha $\psi_1 = \psi$ e si trova

$$M = -\frac{A^2H^2}{4\,l}\cos^2\psi \operatorname{sen} 2\varphi_0 + \Sigma\, B \operatorname{sen}(\mu t + \nu)$$

Notisi anche che per $\omega_1 = \omega$, e per $\omega_1 = -\omega$ si ha rispettivamente $\cos\psi_1 = 0$, $\cos\psi = 0$. Il gruppo di termini compresi nel segno Σ, eseguendo l'integrazione, dà luogo al gruppo di termini

$$-\frac{1}{t_1}\Sigma\frac{B}{\mu}\left\{\cos(\mu t + \nu) - \cos\nu\right\}$$

Se dunque prendiamo t_1 abbastanza grande, in modo da comprendere molte alternazioni di campo, e molte rivoluzioni del circuito, quel gruppo sarà trascurabile, ed avremo allo stato di regime, qualora non sia $\omega_1 = 0$

$$c) \qquad M_m = \frac{A^2H^2}{16\,l}(\operatorname{sen} 2\psi_1 - \operatorname{sen} 2\psi)$$

e se $\omega_1 = 0$, si avrà

$$c') \qquad M_m = -\frac{A^2H^2}{4\,l}\cos^2\psi \operatorname{sen} 2\varphi_0$$

Esiste dunque un momento medio anche ad armatura ferma: esso è nullo per $\varphi_0 = 0,\ = \frac{\pi}{2}$.

« Escludendo ora il valore $\omega_1 = 0$, per il quale la M_m è discontinua, consideriamola per gli altri valori come funzione della variabile ω_1, cioè della velocità angolare del circuito indotto. La M_m è data allora dalla formola c), ed è indipendente dall'angolo iniziale φ_0. Dalle posizioni superiori si ha

$$\operatorname{sen} 2\psi_1 - \operatorname{sen} 2\psi = rl \left\{ \frac{\omega - \omega_1}{r^2 + (\omega - \omega_1)^2 l^2} - \frac{\omega + \omega_1}{r^2 + (\omega - \omega_1)^2 l^2} \right\}$$

quantità che cambia di segno con ω_1, per cui se si portano le ω_1 sull'asse delle x, e le M_m su quelle delle y, la curva che ne risulta è dotata di centro. La M_m, come facilmente si vede, si annulla per $\omega_1 = -\infty$, e per$\omega_1 = +\infty$. Prescindendo da questi due valori, la M_m sarà positiva, nulla o negativa, secondo che sia

$$\frac{\omega - \omega_1}{r^1 + (\omega - \omega_1)^2 l^2} >, =, < \frac{\omega + \omega_1}{r^2 + (\omega + \omega_1)^2 l^2}$$

ossia secondochè

$$\omega_1 \left\{ l^2 (\omega^2 - \omega_1^2) - r^2 \right\} >, =, < 0$$

Dunque se si pone

$$\omega_0 = + \sqrt{\omega^2 - \frac{r^2}{l^2}}$$

la M_m si annulla quando sia $\omega_1 = \pm \omega_0$. Essa poi per ω_1 positivo è positiva quando sia $0 < \omega_1 < + \omega_0$, negativa quado sia $+ \omega_0 < \omega_1 < + \infty$: per ω_1 negativo invece è negativa quando sia $0 > \omega_1 > - \omega_0$, positiva quando sia $- \omega_0 > \omega_1 > - \infty$.

« Da quanto precede si deduce che l'apparecchio può funzionare come motore finchè la velocità angolare ω_1, positiva o negativa, non superi il valore numerico ω_0, e come dinamo quando lo superi. Quando la velocità è grandissima (infinita) od abbia il valore $\pm \omega_0$, l'azione dell'apparecchio è nulla. Così pure naturalmente per $\omega_1 = 0$.

« Siccome però il momento M cambia di segno durante la rotazione, così quando si voglia usare l'apparecchio come motore, bisognerà provvederlo di masse che servano da volante. A ciò del resto potrà bastare la massa stessa dell'armatura, che attesa la velocità di rotazione, generalmente assai grande, è sempre dotata di una notevole forza viva.

« Cerchiamo ora per quali valori di ω_1 il momento medio M_m è massimo o minimo. Per trovare questi valori avremo l'equazione

$$\frac{d M_m}{d\omega_1} = 0 \text{ , cioè } \frac{d \operatorname{sen} 2\psi_1}{d \omega_1} = \frac{d \operatorname{sen} 2\psi}{d\omega_1}$$

ossia

$$\frac{d}{d\omega_1} \left(\frac{\omega - \omega_1}{\lambda_1^2} \right) = \frac{d}{d\omega_1} \left(\frac{\omega + \omega_1}{\lambda^2} \right)$$

« Sviluppando le derivazioni, tenuto conto del valore ω_0, e ponendo per brevità

$$a = 1 + 3\left(\frac{2\,\omega\,r}{l\,\omega_0^{\,2}}\right)^2, \quad b = \left(\frac{\omega^2\,l^2 + r^2}{l^2\omega_0^{\,2}}\right), \qquad \omega_1^{\,2} = u\,\omega_0^{\,2}$$

si trova per determinare la u l'equazione

$$u^3 - u^2 - au + b = 0$$

« Ponendo in questa invece di u successivamente i quattro valori $-\infty$, 0, $+1$, $+\infty$, il primo membro assume i valori $-\infty$, $+b$, $-a+b$, $+\infty$. Ma b è essenzialmente positivo, e $b-a$, posti i valori di a e di b, diventa

$$b - a = -2\left(\frac{2\,\omega\,r}{l\,\omega_0^{\,2}}\right)^2$$

quantità negativa. Dunque per i quattro suddetti valori di u, il primo membro presenta i segni $-$, $+$, $-$, $+$. Ne viene che l'equazione ha tutte tre le radici reali, una negativa, un'altra positiva fra 0 e $+1$, e la terza pure positiva maggiore di $+1$. Chiamate per ordine di grandezza $-u'$, $+u''$, $+u'''$ queste tre radici, avremo per ω_1 le sei $\omega_1 = \pm\,\omega_0\sqrt{-u'}$, $= \pm\,\omega_0\sqrt{u''}$, $= \pm\,\omega_0\sqrt{u'''}$, delle quali due sono immaginarie. Delle altre quattro, avuto riguardo ai valori positivi e negativi sopra discussi della M_m, le $+\,\omega_0\sqrt{u''}$ e $-\omega_0\sqrt{u''}$ danno valori massimi, le $+\omega_0\sqrt{u'''}$, $-\omega_0\sqrt{u''}$ valori minimi. Notando che $u'' < 1$, e considerando i soli valori positivi della ω_1, diremo dunque che la M_m è positiva crescente da $\omega_1 = 0$ (lo zero escluso) fino ad $\omega_1 = \omega_0\sqrt{u''}$; diminuisce, mantenendosi positiva, da $\omega_1 = \omega_0\sqrt{u''}$ fino ad $\omega_1 = \omega_0$, dove si annulla. Diventa poi negativa e raggiunge un minimo (massimo valore negativo) per $\omega_1 = \omega_0\sqrt{u'''}$, e poi mantenendosi negativa decresce indefinitamente di valore numerico. Analoghe osservazioni valgono per valori negativi di ω_1.

« Notiamo intanto che alle velocità angolari ω_0, $\omega_0\sqrt{u''}$, $\omega_0\sqrt{u'''}$ corrispondono i numeri

$$n_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}, \; n_1 = \frac{\omega_0\sqrt{u''}}{2\pi}, \; n_2 = \frac{\omega_0\sqrt{u'''}}{2\pi}$$

che rappresentano i giri fatti nell'unità di tempo.

« Se invece di un solo circuito indotto se ne abbiano moltissimi (come infatti avviene nel motore Thomson-Brown), distribuiti uniformemente come i meridiani d'una sfera, o come le sezioni circolari non concentriche di un toro, i momenti complessivi M ed M_m si potranno avere facilmente, qualora i circuiti si possano considerare come indipendenti. Infatti sia N il numero totale dei circuiti (spire): allora sull'arco infinitesimo $d\varphi_0$ ve ne saranno $\frac{N d\varphi_0}{2\pi}$, e quindi indicando con M', M'_m il momento totale e la media totale sarà

$$M' = \frac{N}{2\pi}\int_0^{2\pi} M d\varphi_0 \qquad M'_m = \frac{N}{2\pi}\int_0^{2\pi} M_m\, d\varphi_0$$

nelle quali in luogo di M dovrà porsi il valore b'), ed in luogo di M_m uno dei valori c), c'). Eseguite le integrazioni, e posto per brevità

$$F_0(t) = \cos\psi\cos(\omega t + \psi) - \cos\psi_1\cos(\omega t + \psi_1)$$

si trova

$$M' = \frac{A^2 H^2 N}{4l} F_0(t) \operatorname{sen} \omega t$$

Col valore c) si trova

$$M'_m = \frac{A^2 H^2 N}{16\, l}(\operatorname{sen} 2\psi - \operatorname{sen} 2\psi).$$

Col valore c') si ha invece $M'_m = 0$; cioè il momento è nullo, se l'armatura non ruota.

« Sul valore di M' si possono fare considerazioni analoghe a qualle fatte sul valore di M. Solamente i fattori che si annullano di tempo in tempo sono qui due soli $F_0(t)$ e $\operatorname{sen}\omega t$. Quanto al valore medio M'_m, non essendo esso che un multiplo di M_m, valgono per esso le stesse considerazioni fatte per M_m; e ciò senza la restrizione relativa al valore $\omega_1 = 0$.

« Giova però notare che sebbene la media M'_m sia positiva per valori di ω_1 soddisfacenti alla $0 < \omega_1 < \omega_0$, l'apparecchio considerato come motore è stabile solamente per valori di ω_1 soddisfacenti alla $\omega_0\sqrt{u''} < \omega_1 < \omega_0$, cioè per valori maggiori di quello che corrisponde al massimo di M'_m, ma minori di ω_0. Infatti per tali valori la M'_m va decrescendo da $\omega_1 = \omega_0\sqrt{u''}$ fino ad $\omega_1 = \omega_0$; in modo che se il motore per aumentata resistenza, che esso debba vincere, rallenta alcun poco la sua velocità, esso svilupperà anche maggiore momento torcente, e potrà così superare la resistenza opposta, e poi riprendere l'andamento normale.

« Quanto al lavoro medio L per unità di tempo sviluppato dal motore, avendosi per moto uniforme $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1$, esso sarà espresso da

$$L = \omega_1 M'_m.$$